

# MATEMATICA FINANZIARIA

I. Valdivia

A.A. 2017/2018 - Sesta Esercitazione 26/04/2018

Es 1 Siano  $V(0; x_1) = 97.20$  euro,  $V(0; x_2) = 107.40$  euro i prezzi di mercato al tempo  $t = 0$  di due zero coupon bond con valori di rimborso  $x_1 = 98.30$  euro e  $x_2 = 109.65$  euro esigibili ai tempi  $t_1 = 121$  giorni e  $t_2 = 211$  giorni. Sia inoltre presente sul mercato un contratto a termine stipulato in  $t = 0$  che prevede lo scambio di 80 euro all'istante  $t_1 = 121$  giorni con 84.90 euro all'istante  $t_3 = 312$  giorni. Relativamente allo scadenziario  $t = \{t_1, t_2, t_3\}$  calcolare la struttura per scadenza dei tassi di interesse a pronti e a termine uniperiodali corrispondente alla struttura dei prezzi assegnata, esprimendo i tassi su base annua (si ipotizzi per l'anno la durata civile).

Es. 2 Dati tre ZCB con prezzi 97, 94, 91 e scadenze 4 mesi, 8 mesi, un anno, determinare la struttura per scadenza dei tassi a pronti. Data tale struttura, calcolare il prezzo di un BTP con cedole quadrimestrali al tasso del 12% annuo che scade fra 12 mesi e di valore nominale 1000.

Es. 3 Si consideri la seguente struttura dei tassi a termine:

$$i(0, 1, 2) = 0.06, \quad i(0, 2, 3) = 0.04.$$

Determinare la struttura dei tassi a pronti essendo il prezzo di uno ZCB che scade fra un anno pari a 96. Ricavare inoltre  $i(0, 4)$  sapendo che la precedente struttura si applica ad un BTP che scade fra 4 anni, prezzato alla pari, che paga cedole annue al tasso del 5%.

Es 4 Ad oggi sono negoziati sul mercato i seguenti titoli:

- (a) BOT a un anno, prezzo 93;
- (b) BTP a due anni, cedola annua 5 euro, prezzo 95;
- (c) BTP a tre anni, cedola annua al tasso biennale del 10%, prezzo 97;
- (d) BTP a quattro anni, cedola annua al tasso del 8%, prezzo 98.

Calcolare la struttura per scadenza dei tassi a pronti.

Es 5 Nel mercato sono trattati due ZCB prezzo 96 e 92, scadenza fra 1 e 2 anni; è inoltre trattato un BTP che paga cedole annue di 10 euro e scade fra 3 anni al prezzo di 90. Determinare la struttura dei prezzi a pronti e calcolare il prezzo di mercato di un titolo che produce il seguente flusso di pagamenti:  $F = \{(10, 10, 100); (1, 2, 3)\}$ .

Es. 6 Si consideri, nell'istante di valutazione  $t = 0$ , un mercato definito sullo scadenziario  $t = \{t_1, t_2\} = \{0.5, 1\}$ , essendo il tempo misurato in anni. Siano trattati sul mercato due titoli a cedola

nulla x e y ed un contratto a termine z: il contratto x paga 100 euro in  $t_1$  ed è scambiato in t a 98 euro; il contratto y paga 52 euro in  $t_2$  con un prezzo in t di 49 euro; il contratto z paga 106 euro in  $t_2$ , al prezzo a termine, pattuito in t e pagato in  $t_1$ , di 100 euro. Verificare se sono possibili arbitraggi non rischiosi e costruire un'eventuale strategia di arbitraggio non rischioso.

Es. 7 I prezzi a pronti degli zero coupon bond unitari che scadono rispettivamente tra 5 e tra 10 anni sono  $P_1 = 0.95$  e  $P_2 = 0.93$ . Il prezzo a termine, con consegna tra 5 anni, dello zero coupon bond che scade tra 10 anni è  $P_3 = 0.97$ . Mostrare come effettuare un arbitraggio in modo da ricavare con certezza 1500 euro all'istante iniziale senza nessun esborso successivo, indicando quante quote degli zcb vanno acquistate/vendute a pronti/termine nei diversi istanti di tempo.

Es. 8 Dati tre titoli con rendimento medio  $\bar{r}_1 = 4\%$ ,  $\bar{r}_2 = 5\%$ ,  $\bar{r}_3 = 6\%$  matrice di varianza/covarianza

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Stabilire se i 3 titoli sono efficienti.

Es. 9 Dati 3 titoli con rendimento medio  $\bar{r}_1 = 4\%$ ,  $\bar{r}_2 = 5\%$ ,  $\bar{r}_3 = 7\%$  e matrice di varianza/covarianza

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Trovare il portafoglio efficiente con rendimento  $\bar{r} = 6\%$ .

Es. 10 Un mercato è composto da tre titoli rischiosi aventi rendimenti indipendenti. I rendimenti attesi sono rispettivamente  $\bar{r}_1 = 1\%$ ,  $\bar{r}_2 = 2\%$ ,  $\bar{r}_3 = 1\%$  e le deviazioni standard  $\sigma_1 = 1$ ,  $\sigma_2 = 2$ ,  $\sigma_3 = 2$ . L'investimento di 150000 euro nel primo titolo e 50000 euro nel terzo titolo è efficiente? Calcolare il rendimento atteso e la varianza del rendimento dell'investimento, rappresentando i valori nel piano media-deviazione standard assieme a quelli corrispondenti ai tre titoli rischiosi.

Es. 11 In un mercato due titoli sono efficienti in media e varianza. Siano  $\bar{r}_1 = 0.1$ ,  $\bar{r}_2 = 0.2$  e  $\sigma_1 = 0.4$ ,  $\sigma_2 = 0.6$ , i rispettivi rendimenti medi e deviazioni standard. I rendimenti dei due titoli sono incorrelati. Calcolare il rendimento atteso R del portafoglio efficiente a varianza minima.

Es. 12 Risolvere il problema di Markowitz nel caso di tre titoli con rendimento medio  $\bar{r}_1 = 1$ ,  $\bar{r}_2 = 2$ ,  $\bar{r}_3 = 3$  e matrice varianza/covarianza

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Nel caso in cui  $\bar{r} = 4$ .

Es. 13 Un mercato è composto da tre titoli i cui tassi di rendimento sono indipendenti. I rendimenti attesi sono  $\bar{r}_1 = 10\%$ ,  $\bar{r}_2 = 10\%$ ,  $\bar{r}_3 = 20\%$  e deviazioni standard  $\sigma_1 = 10\%$ ,  $\sigma_2 = 20\%$ ,  $\sigma_3 = 30\%$ . Dire se qualcuno tra i tre titoli è efficiente in media e varianza.