

MATEMATICA FINANZIARIA

Docente A. Fabretti

A.A. 2017/2018 - Compito test

Cognome Nome Matricola

1) (8 p.ti) Si vuole costituire un portafoglio immunizzato a copertura di un debito di importo C da pagare tra 3 anni. Sul mercato sono presenti uno ZCB con scadenza 5 anni e valore nominale 1000 e un BTP con scadenza 3 anni, valore nominale 100 cedola semestrale e $TAN = 5\%$. Assumendo una struttura di tassi piatta con tasso λ trovare le quote da investire nei due titoli. Trovare anche il valore finale del portafoglio.

Dati: $C = 100000$ $\lambda = 3\%$

Risposta: $q_1 = 8$ $q_2 = 798$ $V = 91247,23$

Svolgimento:

Si deve risolvere il sistema

$$\begin{cases} V_1 + V_2 = VA \\ w_1 D_1 + w_2 D_2 = D \end{cases} \quad \text{dove } V_i = q_i P_i \quad i = 1, 2 \quad \text{e} \quad w_i = \frac{V_i}{VA}$$

Per risolvere il problema c'è bisogno di valore attuale (VA) e duration (D) del debito, d. valore P_1 e duration D_1 dello ZCB e valore P_2 e duration D_2 del BTP

$$VA = 100000 (1 + \lambda)^{-3} = 100000 (1,03)^{-3} = 91514,17 \quad D = 3$$

$$P_1 = 1000 (1 + \lambda)^{-5} = 1000 (1,03)^{-5} = 862,61 \quad D_1 = 5$$

$$P_2 = \frac{F}{\left(1 + \frac{\lambda}{m}\right)^n} + \frac{C}{\lambda} \left(1 - \left(1 + \frac{\lambda}{m}\right)^{-n}\right) = \frac{100}{(1,015)^6} + \frac{5}{0,03} \left(1 - (1 + 0,015)^{-6}\right) = 105,70$$

$$D_2 = \frac{1 + y}{my} - \frac{1 + y + n(c - y)}{mc[(1 + y)^n - 1] + my} = \frac{1 + 0,015}{2(0,015)} - \frac{1 + 0,015 + 6(0,025 - 0,015)}{2 \cdot (0,025)[(1 + 0,015)^6 - 1] + 2 \cdot (0,015)} = 2,83$$

Risolvendo il sistema

$$\begin{cases} V_1 = VA - V_2 \\ (VA - V_2) D_1 + V_2 D_2 = D VA \end{cases} \quad \text{si ha} \quad V_2 = \frac{(D - D_1)}{D_2 - D_1} \cdot VA = 84291,79$$

$$\text{quindi} \quad V_1 = VA - V_2 = 91514,17 - 84291,79 = 7222,38$$

$$q_1 = \frac{V_1}{P_1} = \frac{7222,38}{862,61} = 8,37 \quad \text{arrotondo a } 8$$

$$q_2 = \frac{84291,79}{105,70} = 797,48 \quad \text{arrotondo a } 798$$

Valore portafoglio con 8 quote di ZCB e 798 del BTP

$$V = q_1 P_1 + q_2 P_2 = 8 \cdot 862,61 + 798 \cdot 105,70 = 91247,23$$

2) (7 p.ti) Data la seguente struttura di tassi

$$i(0,1) = 3.05\% \quad i(0,2) = 3.12\% \quad i(0,3) = 3.24\% \quad i(0,4) = 3.90\%$$

determinare prezzo e duration di un BTP con durata quattro anni, cedola annuale, TAN=4%, valore nominale 1000.

Risposta: $P = 1005,21$ $D = 3,77$

Svolgimento:

Il flusso di cassa del BTP $x/t = (40, 40, 40, 1040)/(1, 2, 3, 4)$

$$P = \sum_{k=1}^n x_k v(0, t_k) = \sum_{k=1}^4 x_k (1+i(0, k))^{-k} = 40(1+0,0305)^{-1} + 40(1+0,0312)^{-2} + 40(1+0,0324)^{-3} + 1040(1+0,0390)^{-4} = 1005,21$$

$$D = \frac{\sum_{k=1}^n k x_k v(0, t_k)}{P} = \frac{1 \cdot 40 v(0,1) + 2 \cdot 40 \cdot v(0,2) + 3 \cdot 40 v(0,3) + 4 \cdot 1040 \cdot v(0,4)}{P} = 3,77$$

3) (5 p.ti) Si vuole costituire un capitale C tra n anni versando rate costanti trimestrali di importo R su un conto corrente che offre un tasso di rendimento effettivo annuo i . Determinare R .

Dati: $C = 100000$, $n = 3$, $i = 4\%$

Risposta: $R = 7891,31$

Svolgimento:

numero rate = 12

$$R = \frac{C}{S_{n|i_4}} \quad \text{dove } n=12 \text{ e } i_4 \text{ è il Tasso Trimestrale}$$

$$i_4 = (1+i)^{1/4} - 1 = 0,99\% \quad \text{Tasso Trimestrale}$$

$$R = \frac{C}{S_{12|0,99\%}} = \frac{100'000}{\frac{(1+0,0099)^{12} - 1}{0,0099}} = 7891,31$$

4) (*4 p.ti*) Enunciare il Teorema dei due fondi e descrivere l'idea alla base della dimostrazione del teorema.

5) (*4 p.ti*) Dato $v(t, t_1, t_2)v(t, t_1) > v(t, t_2)$ costruire l'arbitraggio possibile.

Individuare la risposta corretta nelle seguenti domande a risposta multipla. Ogni risposta esatta vale 2 punti, ogni risposta sbagliata -1 punto, risposta non data 0 punti.

6) (2 p.ti) Usando la struttura dei tassi dell'esercizio 2, il prezzo di uno ZCB emesso tra 1 anno e durata 2 anni e valore nominale 100 è

1. 96.91

2. 94.63

3. 88.43

☒ nessuna delle precedenti

7) (2 p.ti) La duration di una rendita perpetua posticipata di rata 1000 euro e valutata al tasso $i = 5\%$ è

1. infinita

☒ 21

3. 20

4. nessuna delle precedenti

8) (2 p.ti) La società Beta ha in portafoglio 20 ZCB con durata un anno e 10 BTP con durata 2 anni e cedola semestrale. Dato che si prevede un aumento dei tassi di interesse è consigliabile

1. acquistare o vendere titoli in modo di aumentare la duration del portafoglio

☒ acquistare o vendere titoli in modo di diminuire la duration del portafoglio

3. lasciare invariato il portafoglio

4. nessuna delle precedenti

9) (2 p.ti) Dato un mercato con due titoli perfettamente correlati negativamente, rendimenti attesi 5% e 7% e deviazioni standard rispettivamente 20% e 26%, il portafoglio a varianza minima ha rendimento atteso

1. 6.14%

☒ 5.87%

3. 5.20%

4. nessuna delle precedenti