

ESERCIZI 23/04/2020
ISABELLA VALDIVIA

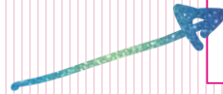
1) Siano $V(0; x_1) = 97.20$ euro, $V(0; x_2) = 107.40$ euro i prezzi di mercato al tempo $t = 0$ di due zero coupon bond con valori di rimborso $x_1 = 98.30$ euro e $x_2 = 109.65$ euro esigibili ai tempi $t_1 = 121$ giorni e $t_2 = 211$ giorni. Sia inoltre presente sul mercato un contratto a termine stipulato in $t = 0$ che prevede lo scambio di 80 euro all'istante $t_1 = 121$ giorni con 84.90 euro all'istante $t_3 = 312$ giorni. Relativamente allo scadenziario $t = \{t_1, t_2, t_3\}$ calcolare la struttura per scadenza dei tassi di interesse a pronti e a termine uniperiodali corrispondente alla struttura dei prezzi assegnata, esprimendo i tassi su base annua (si ipotizzi per l'anno la durata civile).

Dal Teorema di Indipendenza dall'importo si ha che

$$V(0, x_k) = x_k \cdot d(0, t_k)$$



$$d(0, t_k) = \frac{V(0, x_k)}{x_k}, \quad k = 1, 2$$



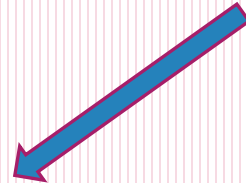
$$V(0, t_1, x_3) = x_3 \cdot d(0, t_1, t_3)$$



$$d(0, t_1, t_3) = \frac{V(0, t_1, x_3)}{x_3}$$

Dal Teorema dei Prezzi Impliciti

$$d(0, t_3) = d(0, t_1) d(0, t_1, t_3)$$



Struttura a Pronti o Struttura Spot



$$i(t, s) = \left[\frac{1}{d(t, s)} \right]^{\frac{1}{s-t}} - 1$$

Struttura a Termine o Struttura Forward

$$d(t; s) = d(t, T)d(t, T, s)$$

$$\frac{1}{[1 + i(t, s)]^{s-t}} = \frac{1}{[1 + i(t, T)]^{T-t}} \cdot \frac{1}{[1 + i(t, T, s)]^{s-T}}$$

$$[1 + i(t, s)]^{s-t} = [1 + i(t, T)]^{T-t} \cdot [1 + i(t, T, s)]^{s-T}$$

$$[1 + i(t, T, s)]^{s-T} = \frac{[1 + i(t, s)]^{s-t}}{[1 + i(t, T)]^{T-t}}$$

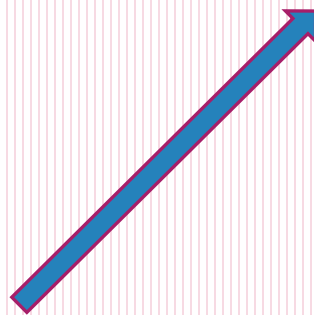
$$i(t, T, s) = \left[\frac{[1 + i(t, s)]^{s-t}}{[1 + i(t, T)]^{T-t}} \right]^{\frac{1}{s-T}} - 1$$

$$i(t, T, s) = \left[\frac{[1 + i(t, s)]^{s-T+T-t}}{[1 + i(t, T)]^{T-t}} \right]^{\frac{1}{s-T}} - 1$$

$$i(t, T, s) = \left[\frac{[1 + i(t, s)]^{s-T} [1 + i(t, s)]^{T-t}}{[1 + i(t, T)]^{T-t}} \right]^{\frac{1}{s-T}} - 1$$

$$i(t, T, s) = [1 + i(t, s)]^{\frac{s-T}{s-T}} \left[\frac{[1 + i(t, s)]^{T-t}}{[1 + i(t, T)]^{T-t}} \right]^{\frac{1}{s-T}} - 1$$

$$i(t, T, s) = [1 + i(t, s)] \cdot \left[\frac{1 + i(t, s)}{1 + i(t, T)} \right]^{\frac{T-t}{s-T}} - 1$$



2) Dati tre ZCB con prezzi 97, 94, 91 e scadenze 4 mesi, 8 mesi, un anno, determinare la struttura per scadenza dei tassi a pronti. Data tale struttura, calcolare il prezzo di un BTP con cedole quadrimestrali al tasso del 12% annuo che scade fra 12 mesi e di valore nominale 1000.

$$d(0, t_k) = \frac{V(0, x_k)}{x_k}$$



$$i(0, t_k) = \left[\frac{1}{d(0, t_k)} \right]^{\frac{1}{t_k}} - 1$$



$$P = 40 \cdot d(0, t_1) + 40 \cdot d(0, t_2) + 1040 \cdot d(0, t_3)$$

Es. 3 Si consideri la seguente struttura dei tassi a termine:

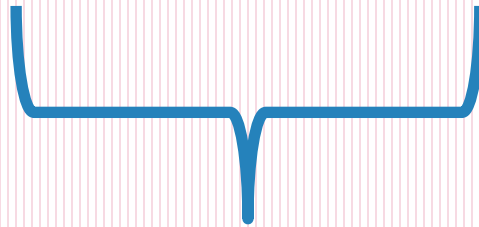
$$i(0, 1, 2) = 0.06, i(0, 2, 3) = 0.04.$$

Determinare la struttura dei tassi a pronti essendo il prezzo di uno ZCB che scade fra un anno pari a 96. Ricavare inoltre $i(0, 4)$ sapendo che la precedente struttura si applica ad un BTP che scade fra 4 anni, prezzato alla pari, che paga cedole annue al tasso del 5%.

$$d(0, 1) = \frac{V(0, 1)}{100}$$

+

$$d(0, 1, 2) = [1 + i(0, 1, 2)]^{-(2-1)}$$



$$d(0, 2) = d(0, 1)d(0, 1, 2)$$

$$d(0, 2, 3) = [1 + i(0, 2, 3)]^{-(3-2)}$$

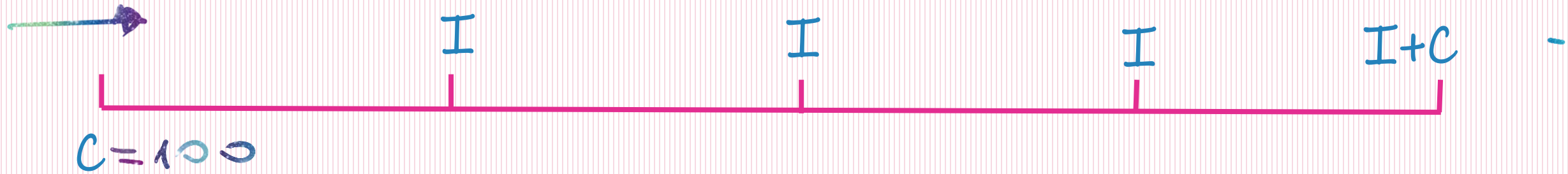


$$d(0, 3) = d(0, 2)d(0, 2, 3)$$

Struttura a Pronti o Struttura Spot



$$i(0, k) = \left[\frac{1}{d(0, k)} \right]^{\frac{1}{k}} - 1$$



$$100 = 5 \cdot d(0, 1) + 5 \cdot d(0, 2) + 5 \cdot d(0, 3) + 105 \cdot d(0, 4)$$



$$d(0, 4)$$



$$i(0, 4) = \left[\frac{1}{d(0, 4)} \right]^{\frac{1}{4}} - 1$$

4) Ad oggi sono negoziati sul mercato i seguenti titoli:

a) BOT a un anno, prezzo 93;

b) BTP a due anni, cedola annua 5 euro, prezzo 95;

c) BTP a tre anni, cedola annua al tasso biennale del 10%, prezzo 97;

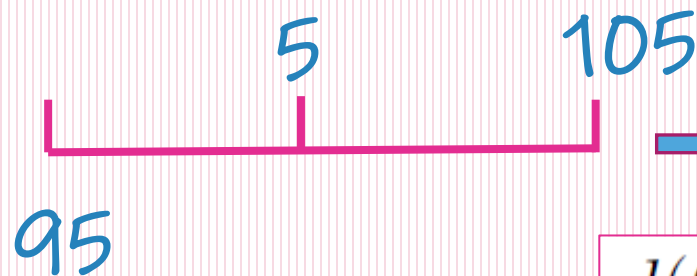
d) BTP a quattro anni, cedola annua al tasso del 8%, prezzo 98.

Calcolare la struttura per scadenza dei tassi a pronti.

Da a) ottengo

$$d(0, 1) = \frac{93}{100}$$

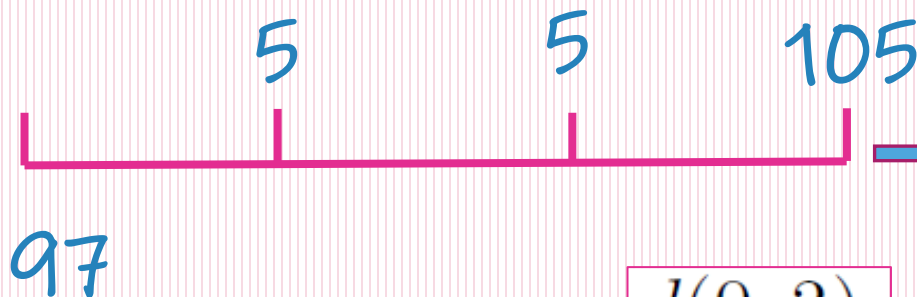
Da b) ottengo



$$5 \cdot d(0, 1) + 105 \cdot d(0, 2) = 95$$

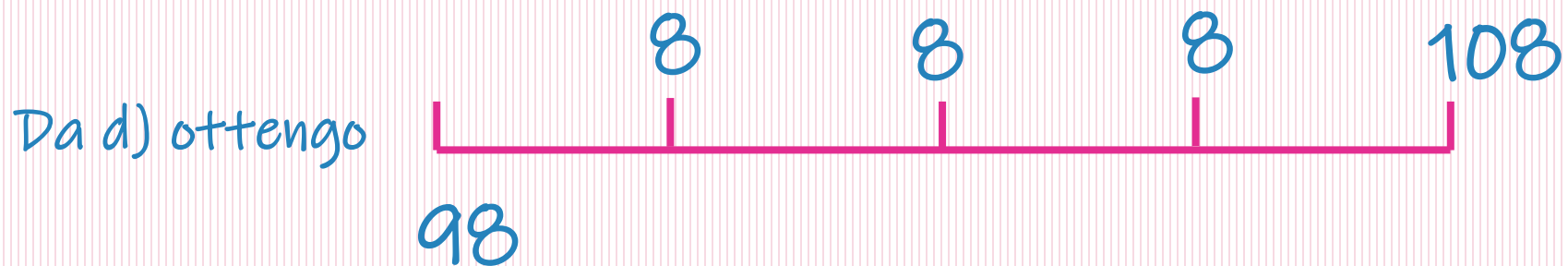
$$d(0, 2)$$

Da c) ottengo



$$5 \cdot d(0, 1) + 5 \cdot d(0, 2) + 105 \cdot d(0, 3) = 97$$

$$d(0, 3)$$



→ $8 \cdot d(0, 1) + 8 \cdot d(0, 2) + 8 \cdot d(0, 3) + 108 \cdot d(0, 4) = 98$

↓

$$d(0, 4)$$

Infine ricaviamo i tassi a pronti



$$i(0, k) = \left[\frac{1}{d(0, k)} \right]^{\frac{1}{k}} - 1$$

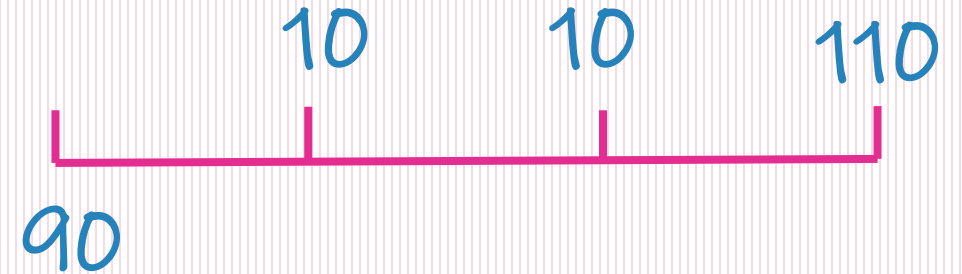
5) Nel mercato sono trattati due ZCB prezzo 96 e 92, scadenza fra 1 e 2 anni; è inoltre trattato un BTP che paga cedole annue di 10 euro e scade fra 3 anni al prezzo di 90. Determinare la struttura dei prezzi a pronti e calcolare il prezzo di mercato di un titolo che produce il seguente flusso di pagamenti : $F = \{(10, 10, 100); (1, 2, 3)\}$.

I primi prezzi a pronti si ricavano da



$$d(0, k) = \frac{P_k}{VN_k}, \quad k = 1, 2$$

Ricavo il terzo prezzo a pronti con un'operazione di bootstrap



$$90 = 10 \cdot d(0, 1) + 10 \cdot d(0, 2) + 110 \cdot d(0, 3)$$



$$d(0, 3)$$

Infine

$$P_F = 10 \cdot d(0, 1) + 10 \cdot d(0, 2) + 100 \cdot d(0, 3)$$

6) Si consideri, nell'istante di valutazione $t = 0$, un mercato definito sullo scadenziario $t = \{t_1, t_2\} = \{0.5, 1\}$, essendo il tempo misurato in anni. Siano trattati sul mercato due titoli a cedola nulla x e y ed un contratto a termine z : il contratto x paga 100 euro in t_1 ed è scambiato in t a 98 euro; il contratto y paga 52 euro in t_2 con un prezzo in t di 49 euro; il contratto z paga 106 euro in t_2 , al prezzo a termine, pattuito in t e pagato in t_1 , di 100 euro. Verificare se sono possibili arbitraggi non rischiosi e costruire un'eventuale strategia di arbitraggio non rischioso.

Calcoliamo:

$$d(0, t_k) = \frac{P_k}{VN_k}$$

+

$$d(0, t_1, t_2) = \frac{P_z}{VN_z}$$

Controlliamo se è soddisfatto il Teorema dei Prezzi Impliciti.
Secondo i dati ottenuti, risulta:

$$d(0, t_2) > d(0, t_1) \cdot d(0, t_1, t_2)$$

Viene a mancare l'uguaglianza, pertanto c'è possibilità di arbitraggio

$$d(0, t_2) > d(0, t_1) \cdot d(0, t_1, t_2)$$

ARBITRAGGIO POSSIBILE

.

- (A) Vendita allo scoperto, in 0, di una unità del titolo y
- (B) Acquisto a pronti, in 0, di $d(0, t_1, t_2)$ unità del titolo x
- (C) Acquisto a termine, per consegna in $t = 0, 5$, di una unità del titolo z

7) I prezzi a pronti degli zero coupon bond unitari che scadono rispettivamente tra 5 e tra 10 anni sono $P_1 = 0.95$ e $P_2 = 0.93$. Il prezzo a termine, con consegna tra 5 anni, dello zero coupon bond che scade tra 10 anni è $P_3 = 0.97$. Mostrare come effettuare un arbitraggio in modo da ricavare con certezza 1500 euro all'istante iniziale senza nessun esborso successivo, indicando quante quote degli zcb vanno acquistate/vendute a pronti/termine nei diversi istanti di tempo.

Il Teorema dei prezzi impliciti non è rispettato, perché

$$d(0, 10) - d(0, 5, 10) \cdot d(0, 5) = P_2 - P_3 \cdot P_1 = x > 0$$



$$d(0, 10) > d(0, 5, 10) \cdot d(0, 5)$$

Posso attuare un arbitraggio che mi garantisca un guadagno certo di 1500 €

Guadagno certo di 1500 €

$$C \cdot x = 1500$$



$$C = \frac{1500}{x}$$

$$d(0, 10) > d(0, 5, 10) \cdot d(0, 5)$$

ARBITRAGGIO POSSIBILE

- (A) Vendo a pronti C ZCB che scadono in 10;
- (B) Acquisto a pronti $C \cdot P_3$ ZCB che scadono in 5;
- (C) Acquisto a termine C ZCB che scadono in 10 e che decorrono da $t = 5$.