Lezione del 23 Aprile 2020

1) Siano $V(0; x_1) = 97.20$ euro, $V(0; x_2) = 107.40$ euro i prezzi di mercato al tempo $t = 0$ di due zero coupon bond con valori di rimborso $x_1 = 98.30$ euro e $x_2 = 109.65$ euro esigibili ai tempi $t_1 = 121$ giorni e $t_2 = 211$ giorni. Sia inoltre presente sul mercato un contratto a termine stipulato in $t = 0$ che prevede lo scambio di 80 euro all'istante $t_1 = 121$ giorni con 84.90 euro all'istante $t_3 = 312$ giorni. Relativamente allo scadenzario $t = \{t_1, t_2, t_3\}$ calcolare la struttura per scadenza dei tassi di interesse a pronti e a termine uniperiodali corrispondente alla struttura dei prezzi assegnata, esprimendo i tassi su base annua (si ipotizzi per l'anno la durata civile).

$$V(0, x_1) = x_1 d(0, t_1)$$

$$d(0, t_1) = \frac{V(0, x_1)}{x_1} =$$

$$= 0{,}98881$$

$$V(0, x_2) = x_2 d(0, t_2)$$

$$d(0, t_2) = \frac{V(0, x_2)}{x_2} =$$

$$= 0{,}97948$$

$$V(0, t_1, x_3) = x_3 \, d(0, t_1, t_3)$$

$$d(0, t_1, t_3) = \frac{V(0, t_1, x_3)}{x_3} =$$

$$= 0,94228$$

THM. PREZZI IMPLICITI

$$d(0, t_3) = d(0, t_1) \cdot d(0, t_1, t_3)$$

$$= 0,93174$$

Applica ora la formula

$$i(t, s) = \left[\frac{1}{d(t, s)} \right]^{\frac{1}{s-t}} - 1$$

$$i(0,t_1) = \left[\frac{1}{d(0,t_1)}\right]^{\frac{1}{t_1}} - 1$$

$$= 3{,}4528\%$$

121 gg =

$\frac{121}{365}$ anno

$$i(0,t_2) = \left[\frac{1}{d(0,t_2)}\right]^{\frac{1}{t_2}} - 1 =$$

$t_2 = \frac{211}{365}$ anni

$$= 3{,}651699\%$$

$$i(0,t_3) = \left[\frac{1}{d(0,t_3)}\right]^{\frac{1}{t_3}} - 1$$

$$= 8{,}622286\%$$

$$i(t,T,S) = \left[1+i(t,S)\right] \cdot \left[\frac{1+i(t,S)}{1+i(t,T)}\right]^{\frac{T-t}{S-T}} - 1$$

$$i(0,0,t_1) = i(0,t_1) = 3{,}45280\%$$

$$i(0,t_1,t_2) = \left[1+i(0,t_2)\right] \cdot$$

$$\cdot \left[\frac{1+i(0,t_2)}{1+i(0,t_1)}\right]^{\frac{t_1}{t_2-t_1}} - 1$$

$$= 3{,}91969\%$$

$$i(0,t_2,t_3) =$$

$$= \left[1+i(0,t_3)\right] \cdot \left[\frac{1+i(0,t_3)}{1+i(0,t_2)}\right]^{\frac{t_3-0}{t_3-t_2}} - 1$$

$$= 19{,}79080\%$$

2) Dati tre ZCB con prezzi 97, 94, 91 e scadenze 4 mesi, 8 mesi, un anno, determinare la struttura per scadenza dei tassi a pronti. Data tale struttura, calcolare il prezzo di un BTP con cedole quadrimestrali al tasso del 12% annuo che scade fra 12 mesi e di valore nominale 1000.

$$d(0,t_1) = \frac{V(0,x_1)}{100} = 0.97$$

$$d(0,t_2) = \frac{V(0,x_2)}{100} = 0.94$$

$$d(0,t_3) = \frac{V(0,x_3)}{100} = 0.91$$

$$i(0,t_1) = \left[\frac{1}{d(0,t_1)}\right]^{\frac{1}{t_1}} - 1 =$$

$$t_1 = 4 \text{ mesi} = \frac{4}{12} \text{ anno}$$

$$\frac{1}{t_1} = \frac{12}{4}$$

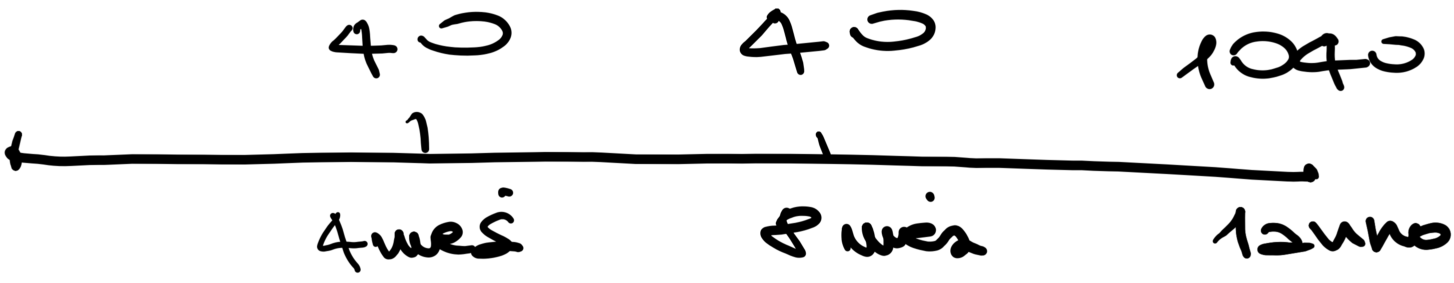
$$= \left[\frac{1}{0.97}\right]^{\frac{12}{4}} - 1 = 9,568\ \%$$

$$i(0,t_2)=\left[\frac{1}{d(0,t_2)}\right]^{\frac{1}{t_2}}-1=$$

$$=\left[\frac{1}{0.94}\right]^{\frac{12}{8}}-1=9{,}7269\%$$

$$i(0,t_3)=\left[\frac{1}{d(0,t_3)}\right]^{\frac{1}{t_3}}-1=$$

$$=\left[\frac{1}{0.91}\right]^{1}-1=9{,}890\%$$



$$P=40\cdot d(0,t_1)+40\cdot d(0,t_2)$$

$$+1040\cdot d(0,t_3)=1022{,}8$$

$$TAN=12\%\Rightarrow i_{1/3}=\frac{TAN}{3}=4\%$$

$$d(0,t_1) = \frac{1}{\left[1 + i(0,t_1)\right]^{t_1}}$$

$$i(0,t_1)$$

Es. 3 Si consideri la seguente struttura dei tassi a termine:

$i(0,1,2) = 0.06$, $i(0,2,3) = 0.04$.

Determinare la struttura dei tassi a pronti essendo il prezzo di uno ZCB che scade fra un anno pari a 96. Ricavare inoltre $i(0,4)$ sapendo che la precedente struttura si applica ad un BTP che scade fra 4 anni, prezzato alla pari, che paga cedole annue al tasso del 5%.

$$d(0,1) = \frac{V(0,x_1)}{100} = 0.96$$

$$d(0,1,2) = \left[1 + i(0,1,2)\right]^{-(2-1)}$$

$$= \left[1 + 0{,}06\right]^{-1} = 0{,}943396$$

$$d(0,2) = d(0,1) \cdot d(0,1,2)$$

$$= 0{,}90566$$

$$d(0,2,3) = \left[1 + i(0,2,3)\right]^{-(3-2)}$$

$$= \left[1 + 0{,}04\right]^{-1} = 0{,}9615$$

$$d(0,3) = d(0,2) \cdot d(0,2,3)$$

$$= 0,870827$$

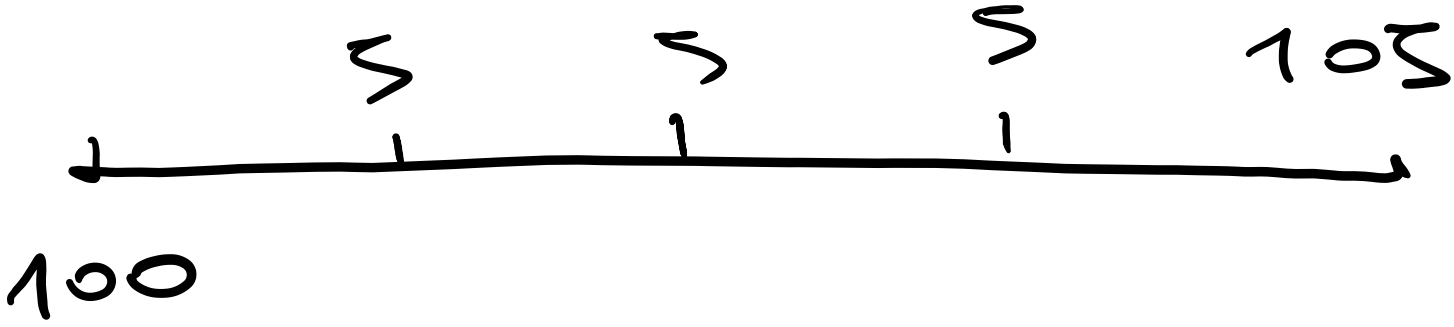
$\longrightarrow$ RICAVIAMO LA STRUTTURA A PRONT dei TASSI

$$i(0,1) = \left[\frac{1}{d(0,1)}\right]^{\frac{1}{1-0}} - 1 = 4,17\%$$

$$i(0,2) = \left[\frac{1}{d(0,2)}\right]^{\frac{1}{2-0}} - 1 = 5,08\%$$

$$i(0,3) = \left[\frac{1}{d(0,3)}\right]^{\frac{1}{3-0}} - 1 = 4,72\%$$

TECNICA DEL BOOTSTRAP



$$100 = 5\,d(0,1) + 5\,d(0,2) + 5\,d(0,3) + 105\,d(0,4)$$

$$100 = 5 \cdot [d(0,1) + d(0,2) + d(0,3)] + 105\,d(0,4)$$

$$105 \cdot d(0,4) = 100 - 5[d(0,1) + d(0,2) + d(0,3)]$$

$$d(0,4) = \frac{100 - 5[d(0,1) + d(0,2) + d(0,3)]}{105}$$

$$= 0,822072$$

$$i(0,4)=\left[\frac{1}{d(0,4)}\right]^{\frac{1}{4}}-1\simeq 5{,}02\%$$

4) Ad oggi sono negoziati sul mercato i seguenti titoli:

a) BOT a un anno, prezzo 93;

b) BTP a due anni, cedola annua 5 euro, prezzo 95;

c) BTP a tre anni, cedola annua al tasso biennale del 10%, prezzo 97;

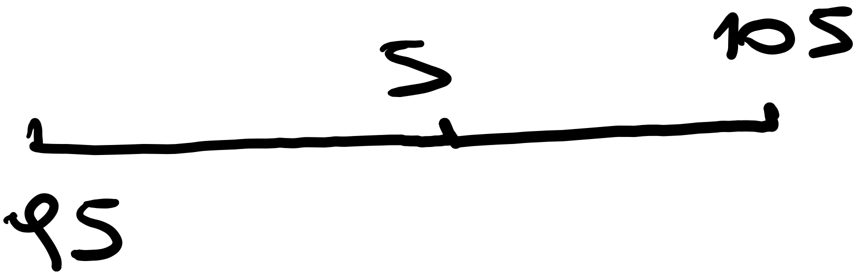
d) BTP a quattro anni, cedola annua al tasso del 8%, prezzo 98.

Calcolare la struttura per scadenza dei tassi a pronti.

a)

$$d(0,1) = \frac{93}{100} = 0.93$$

b)



$$5 \cdot d(0,1) + 105 \cdot d(0,2) = 95$$

$$d(0,2) = \frac{95 - 5 \cdot d(0,1)}{105} =$$

$$= 0,860476$$

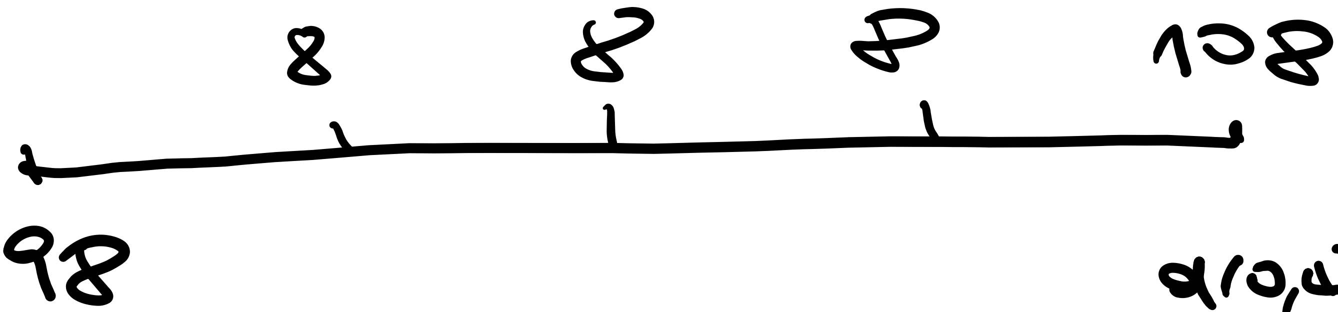
c)

$$5\alpha(0,1)+5\alpha(0,2)+105\alpha(0,3) = 97$$

$$\alpha(0,3)=\frac{97-5[\alpha(0,1)+\alpha(0,2)]}{105}$$

$$= 0{,}838549$$

d)



$$8\cdot\alpha(0,1)+8\cdot\alpha(0,2)+8\cdot\alpha(0,3)+108\cdot\alpha(0,4) = 98$$

$$\alpha(0,4)=\frac{98-8[\alpha(0,1)+\alpha(0,2)+\alpha(0,3)]}{108}$$

$$= 0{,}712665$$

$$i(0,1) = \left[\frac{1}{d(0,1)}\right]^{\frac{1}{1-0}} - 1 \cong 7,53\%$$

$$i(0,2) = \left[\frac{1}{d(0,2)}\right]^{\frac{1}{2-0}} - 1 \simeq 7,803\%$$

$$i(0,3) = \left[\frac{1}{d(0,3)}\right]^{\frac{1}{3}} - 1 \simeq 6,045\%$$

$$i(0,4) = \left[\frac{1}{d(0,4)}\right]^{\frac{1}{4}} - 1 \simeq 8,84\%$$

5) Nel mercato sono trattati due ZCB prezzo 96 e 92, scadenza fra 1 e 2 anni; è inoltre trattato un BTP che paga cedole annue di 10 euro e scade fra 3 anni al prezzo di 90. Determinare la struttura dei prezzi a pronti e calcolare il prezzo di mercato di un titolo che produce il seguente flusso di pagamenti : $F = \{(10, 10, 100); (1, 2, 3)\}$.

$$d(0,1) = \frac{96}{100} = 0{,}96$$

$$d(0,2) = \frac{92}{100} = 0.92$$

$$10 \cdot d(0,1) + 10 \cdot d(0,2) + 110 \cdot d(0,3) = 90$$

$$d(0,3) = \frac{90 - 10[d(0,1) + d(0,2)]}{110}$$

$$= 0{,}6472727$$

$$F = \{10, 10, 100\} \{1, 2, 3\}$$

$$P_F = 10 \cdot d(0,1) + 10 \cdot d(0,2) + 100 \, d(0,3) = 83{,}527277 €$$

7) I prezzi a pronti degli zero coupon bond unitari che scadono rispettivamente tra 5 e tra 10 anni sono P1 = 0.95 e P2 = 0.93. Il prezzo a termine, con consegna tra 5 anni, dello zero coupon bond che scade tra 10 anni `e P3 = 0.97. Mostrare come effettuare un arbitraggio in modo da ricavare con certezza 1500 euro all'istante iniziale senza nessun esborso successivo, indicando quante quote degli zcb vanno acquistate/vendute a pronti/termine nei diversi istanti di tempo.

$$d(0,10) - d(0,5,10) \cdot d(0,5)$$

$$= P_2 - P_3 P_1 = \underbrace{0{,}0085}_{x} > 0$$

$$d(0,10) > d(0,5,10) \cdot d(0,5)$$

è possibile realizzare una strategia di arbitraggio

$$C \cdot x = 1500 \Longrightarrow$$

$$C = \frac{1500}{x} = 176470{,}59$$

	0	5	10
1)	$C\cdot P_2$		$-C$
2)	$-CP_3\cdot P_1$	CP_3	
3)		$-C\cdot P_3$	$+C$
	$CP_2 - CP_3\cdot P_1$	//	//

$$= C\cdot(P_2 - P_3\cdot P_1)$$

$$= C\cdot x = 1500€$$