Esercizi Riepilogo su teoria del portafoglio

1) Dati 3 titoli con rendimento medio $\bar{r}_1 = 2\%$, $\bar{r}_2 = 3\%$, $\bar{r}_3 = 5\%$ e matrice di varianza e covarianza

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

Determinare rendimento $\bar{r}$ e varianza σ^2 del portafoglio $w = (\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4})$ e stabilire motivando la risposta se il portafoglio é efficiente.

Soluzione Ex 1

Rendimento

$$\bar{r} = w_1 \bar{r}_1 + w_2 \bar{r}_2 + w_3 \bar{r}_3 =$$

$$= \frac{1}{4} \cdot 0.02 + \frac{1}{2} \cdot 0.04 + \frac{1}{4} \cdot 0.05 =$$

$$= 3{,}75\ \%$$

$$\sigma^2 = \vec{w}\, \Sigma\, \vec{w}' =$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix} =$$

$$= 32{,}81\ \%$$

il portafoglio $\vec{w}$ è efficiente

se le matrici

$$\left(\Sigma \vec{w} \;\vdots\; \vec{r} \;\vdots\; \vec{1}\right)$$

e $\left(\vec{r} \;\vdots\; \vec{1}\right)$ hanno stesso rango

$$\Sigma \vec{w} = \begin{pmatrix} 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/4 \\ 1/2 \\ 1/4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/16 \\ 3/8 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

$$\left(\vec{r} \;\vdots\; \vec{1}\right) = \begin{pmatrix} 0.02 & 1 \\ 0.03 & 1 \\ 0.05 & 1 \end{pmatrix}$$ ha rango 2

$$\begin{pmatrix} 1/16 & 0.02 & 1 \\ 3/8 & 0.03 & 1 \\ 1/2 & 0.05 & 1 \end{pmatrix}$$ ha rango 3

il portafoglio NON è efficiente

2) Dati tre portafogli A, B e C efficienti in media e varianza calcolare la varianza dei rendimenti di C sapendo che

1) Il rendimento atteso di C é uguale alla somma di 1/4 del rendimento medio di A e di 3/4 del rendimento medio di B

2) La correlazione tra i rendimenti di A e B é 0.2, le loro deviazioni standard sono a σ_A e σ_B.

Dati:$\sigma_A = 20\%$, $\sigma_B = 30\%$

Soluzione ex 2

se A, B, C sono efficienti
C può essere scritto come
combinazione di B e C

$$\vec{w}_C = \alpha \vec{w}_A + (1-\alpha)\vec{w}_B$$

$$\bar{r}_C = \alpha \bar{r}_A + (1-\alpha)\bar{r}_B$$

dove da informazione 1) capiamo
che $\alpha = \frac{1}{4}$

$$\sigma_C^2 = \alpha^2 \sigma_A^2 + 2\alpha(1-\alpha)\rho\,\sigma_A\sigma_B + (1-\alpha)^2\sigma_B^2$$

$$= \left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot (0,2)^2 + 2\,\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}\,(0.2)(0.2)(0.3) + \left(\frac{3}{4}\right)^2 \cdot (0,3)^2$$

$$= 0,0576$$

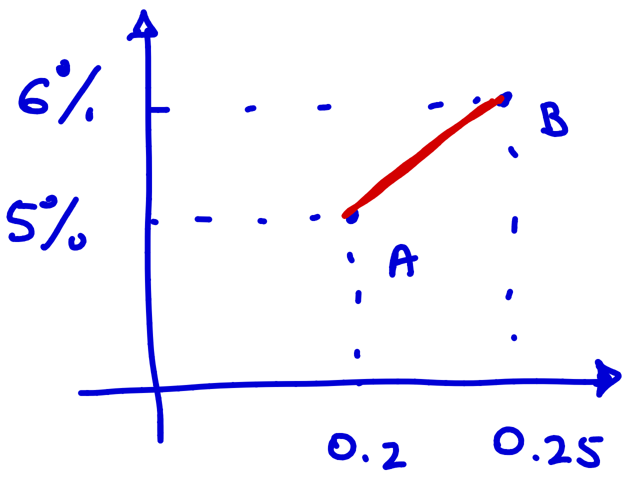
$$\sigma_C = 24\%$$

3) Determinare il portafoglio a varianza minima costituito da due titoli perfettamente correlati con $r_A = 5\%$, $r_B = 6\%$, $\sigma_A = 0.2$, $\sigma_B = 0.25$.

4) Siano A e B due fondi efficienti con rendimenti attesi $\bar{r}_A = 10\%$ e $\bar{r}_B = 15\%$, deviazioni standard $\sigma_A = 0.1$, $\sigma_B = 0.15$ e correlazione $\rho = 0.4$. Si vogliono investire X euro in un portafoglio efficiente con rendimento atteso $\bar{r} = 12\%$. Determinare quanto denaro X_B occorre investire nel fondo B.

3) Determinare il portafoglio a varianza minima costituito da due titoli perfettamente correlati con $r_A = 5\%$, $r_B = 6\%$, $\sigma_A = 0.2$, $\sigma_B = 0.25$.

Se $\rho = 1$ il diagramma di portafoglio è una retta che unisce A e B

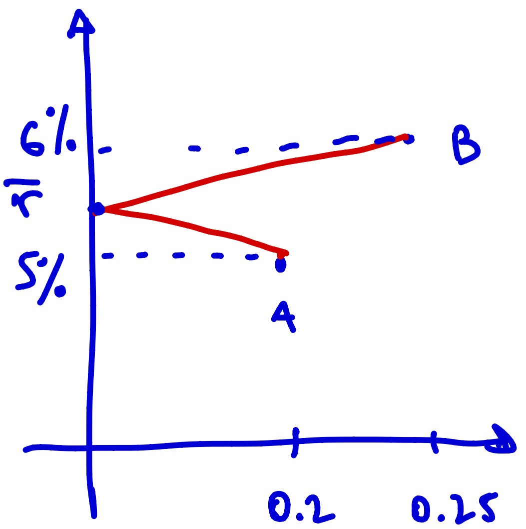


il portafoglio di varianza minima è quello composto solo da A quindi

$\sigma_{min} = 0.2$

$\vec{w} = (1, 0)$

Se $\rho = -1$ il diagramma di portafoglio sono "2 rette"



il portafoglio a varianza minima è quello che ha

$\sigma = 0$ e

$$\text{rendimento} = \frac{\bar{r}_B \sigma_A + \bar{r}_A \sigma_B}{\sigma_A + \sigma_B}$$

$= 5{,}44\%$

4) Siano A e B due fondi efficienti con rendimenti attesi $\bar{r}_A = 10\%$ e $\bar{r}_B = 15\%$, deviazioni standard $\sigma_A = 0.1$, $\sigma_B = 0.15$ e correlazione $\rho = 0.4$. Si vogliono investire X euro in un portafoglio efficiente con rendimento atteso $\bar{r} = 12\%$. Determinare quanto denaro X_B occorre investire nel fondo B.

Determino α

$$\alpha = \frac{\bar{r} - \bar{r}_B}{\bar{r}_A - \bar{r}_B} = \frac{0.12 - 0.15}{0,10 - 0,15} = \frac{3}{5}$$

peso in B è $\frac{2}{5}$

se $X = 1000$ si investe

$$X_B = 1000 \cdot \frac{2}{5} = 400$$

5) Dati 3 titoli con rendimento medio $\bar{r}_1 = 3.5\%$, $\bar{r}_2 = 4\%$, $\bar{r}_3 = 6\%$ e matrice di varianza e covarianza

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 0.02 & 0 & 0 \\ 0 & 0.01 & -0.02 \\ 0 & -0.02 & 0.2 \end{pmatrix}$$

determinare il portafoglio efficiente con rendimento $\bar{r} = 5\%$.

6) Un portafoglio efficiente é composto per metá dal portafoglio di mercato e per metá da un titolo risk free con rendimento 2%. Sapendo che il portafoglio ha rendimento atteso pari a 4% e varianza 0.1. Determinare rendimento atteso e varianza del portafoglio di mercato.

5) Dati 3 titoli con rendimento medio $\bar{r}_1 = 3.5\%$, $\bar{r}_2 = 4\%$, $\bar{r}_3 = 6\%$ e matrice di varianza e covarianza

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 0.02 & 0 & 0 \\ 0 & 0.01 & -0.02 \\ 0 & -0.02 & 0.2 \end{pmatrix}$$

determinare il portafoglio efficiente con rendimento $\bar{r} = 5\%$.

Il portafoglio efficiente soddisfa il sistema

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} w_j \sigma_{ij} - \lambda \bar{r}_i - \mu = 0 & \forall i = 1 \dots n \\ \sum_{i=1}^{n} w_i \bar{r}_i = \bar{r} \\ \sum_{i=1}^{n} w_i = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} w_1 \sigma_1^2 + w_2 \sigma_{12} + w_3 \sigma_{13} - \lambda \bar{r}_1 - \mu = 0 \\ w_1 \sigma_{21} + w_2 \sigma_2^2 + w_3 \sigma_{23} - \lambda \bar{r}_2 - \mu = 0 \\ w_1 \sigma_{31} + w_2 \sigma_{32} + w_3 \sigma_3^2 - \lambda \bar{r}_3 - \mu = 0 \\ w_1 \bar{r}_1 + w_2 \bar{r}_2 + w_3 \bar{r}_3 = \bar{r} \\ w_1 + w_2 + w_3 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0{,}02 \cdot w_1 - 0{,}035\lambda - \mu = 0 \\ 0{,}01\, w_2 - 0{,}02 w_3 - 0{,}04\lambda - \mu = 0 \\ -0{,}02 w_2 + 0{,}2 w_3 - 0{,}06\lambda - \mu = 0 \\ w_1 \cdot 0{,}035 + w_2 \cdot 0{,}04 + w_3 \cdot 0{,}06 = 0{,}05 \\ w_1 + w_2 + w_3 = 1 \end{cases}$$

moltiplicando per 1000 la 1 e 4
100 le 2,3

$$\begin{cases} 20 w_1 - 35\lambda - 1000\mu = 0 \\ w_2 - 2 w_3 - 4\lambda - 100\mu = 0 \\ -2 w_2 + 20 w_3 - 6\lambda - 100\mu = 0 \\ 35 w_1 + 40 w_2 + 60 w_3 = 50 \\ w_1 + w_2 + w_3 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4 w_1 - 7\lambda - 200\mu = 0 \\ w_2 - 2 w_3 - 4\lambda - 100\mu = 0 \\ -w_2 + 10 w_3 - 3\lambda - 50\mu = 0 \\ 7 w_1 + 8 w_2 + 12 w_3 = 10 \\ w_1 + w_2 + w_3 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4w_1 - 7\lambda - 200\mu = 0 \\ w_2 - 2w_3 - 4\lambda - 100\mu = 0 \\ -w_2 + 10w_3 - 3\lambda - 50\mu = 0 \\ 7w_1 + 8w_2 + 12w_3 = 10 \\ w_1 + w_2 + w_3 = 1 \end{cases}$$

$$w_1 = \frac{7\lambda + 200\mu}{4}$$

$$w_2 = 2w_3 + 4\lambda + 100\mu$$

sostituisco in 3, 4, 5

$$-2w_3 - 4\lambda - 100\mu + 10w_3 - 3\lambda - 50\mu = 0$$

$$8w_3 - 7\lambda - 150\mu = 0$$

$$w_3 = \frac{7\lambda + 150\mu}{8}$$

ricavo anche $w_2 = 2\,\frac{7\lambda + 150\mu}{8} + 4\lambda + 100\mu =$

$$= \frac{23\lambda + 550\mu}{4}$$

Sostituire w_1, w_2 e w_3 nella 4 e 5

$$7w_1 + 8w_2 + 12w_3 = 10$$

$$w_1 + w_2 + w_3 = 1$$

$$w_1 = \frac{7\lambda + 200\mu}{4} \qquad w_2 = \frac{23\lambda + 550\mu}{4} \qquad w_3 = \frac{7\lambda + 150\mu}{8}$$

$$\begin{cases} 7\cdot\left(\dfrac{7\lambda+200\mu}{4}\right)+8\left(\dfrac{23\lambda+550\mu}{4}\right)+\cancel{12}^{\,6}\left(\dfrac{7\lambda+150\mu}{\cancel{8}\,4}\right)=10 \\ \dfrac{7\lambda+200\mu}{4}+\dfrac{23\lambda+550\mu}{4}+\dfrac{7\lambda+150\mu}{8}=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 49\lambda+1400\mu+184\lambda+4400\mu+42\lambda+900\mu=40 \\ 14\lambda+400\mu+46\lambda+1100\mu+7\lambda+150\mu=8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 275\lambda+6700\mu=40 \\ 67\lambda+1650\mu=8 \end{cases} \qquad \lambda=\frac{40-6700\mu}{275}$$

$$67\cdot\frac{40-6700\mu}{275}+1650\mu=8$$

$$\mu=-\frac{48}{485} \qquad \lambda=\frac{40-6700\cdot\left(-\frac{48}{485}\right)}{275}=$$

$$=\frac{40-1340\cdot\left(-\frac{48}{97}\right)}{275}=\frac{248}{97}$$

$w_1=-0,4742$

$w_2=1,0928$

$w_3=0,3814$

6) Un portafoglio efficiente é composto per metá dal portafoglio di mercato e per metá da un titolo risk free con rendimento 2%. Sapendo che il portafoglio ha rendimento atteso pari a 4% e varianza 0.1. Determinare rendimento atteso e varianza del portafoglio di mercato.

$$\bar{r} = \alpha r_f + (1-\alpha)\bar{r}_m = \frac{1}{2} r_f + \frac{1}{2}\bar{r}_m$$

$$r_f = 0{,}02$$

$$\alpha = \frac{1}{2} \qquad \bar{r} = 0{,}04$$

$$\bar{r}_m = 2\left(\bar{r} - \frac{1}{2} r_f\right) = 2\left(0.04 - 0{,}01\right) =$$

$$= 0{,}06 \qquad 6\%$$

$$\sigma^2 = (1-\alpha)^2 \sigma_m^2$$

$$\sigma_m^2 = 4\sigma^2 = 4 \cdot 0{,}1 = 0{,}4$$

7) Considerati 3 titoli con rendimenti attesi $\bar{r}_1 = 3\%$, $\bar{r}_2 = 4\%$ e $\bar{r}_3 = 8\%$; siano A e B due portafogli efficienti con pesi:

$$\mathbf{w_A} = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right) \qquad\qquad \mathbf{w_B} = \left(\frac{1}{3}, 0, \frac{2}{3}\right).$$

Si vogliono investire Y euro in un portafoglio efficiente con rendimento atteso $\bar{r}$. Determinare quanto denaro Y_1 occorre investire nel titolo 1.

Dati: $Y = 20000$, $\bar{r} = 6\%$

8) Dati 3 titoli con rendimento medio $\bar{r}_1 = 12\%$, $\bar{r}_2 = 13\%$, $\bar{r}_3 = 17\%$. Sapendo che i titoli 1 e 3 sono efficienti determinare il portafoglio efficiente con rendimento $\bar{r} = 13\%$.

7) Considerati 3 titoli con rendimenti attesi $\bar{r}_1 = 3\%$, $\bar{r}_2 = 4\%$ e $\bar{r}_3 = 8\%$; siano A e B due portafogli efficienti con pesi:

$$\mathbf{w_A} = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right) \qquad \mathbf{w_B} = \left(\frac{1}{3}, 0, \frac{2}{3}\right).$$

Si vogliono investire Y euro in un portafoglio efficiente con rendimento atteso $\bar{r}$. Determinare quanto denaro Y_1 occorre investire nel titolo 1.

$$\vec{w} = \alpha \vec{w}_A + (1-\alpha)\vec{w}_B$$

$$\bar{r} = \alpha \bar{r}_A + (1-\alpha)\bar{r}_B$$

$$\alpha = \frac{\bar{r} - \bar{r}_B}{\bar{r}_A - \bar{r}_B} = \frac{0.06 - 0{,}0633}{0{,}0575 - 0{,}0633} =$$

$$= \frac{-0{,}0033}{-0{,}0058} \simeq 0{,}57 = \frac{4}{7}$$

$$\bar{r}_B = \frac{1}{3} \cdot 0{,}03 + \frac{2}{3} \cdot 0.08 =$$

$$= 0{,}06\bar{3} = 6{,}33\,\%$$

$$\bar{r}_A = \frac{1}{4}\, 0{,}03 + \frac{1}{4}\, 0.04 + \frac{1}{2}\, 0{,}08 =$$

$$= 0{,}0575 = 5{,}75\,\%$$

$$\alpha = \frac{4}{7}$$

$$\vec{w} = \frac{4}{7}\vec{w}_A + \frac{3}{7}\vec{w}_B =$$

$$= \frac{4}{7}\begin{pmatrix} 1/4 \\ 1/4 \\ 1/2 \end{pmatrix} + \frac{3}{7}\begin{pmatrix} 1/3 \\ 0 \\ 2/3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1/7 + 1/7 \\ 1/7 \\ \frac{2}{7} + \frac{2}{7} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/7 \\ 1/7 \\ \frac{4}{7} \end{pmatrix}$$

$$Y_1 = w_1 \cdot Y = \frac{2}{7} \cdot 20'000 =$$

$$= 5714.29$$