

MATEMATICA FINANZIARIA

Isabella Valdivia

Esercitazione su Struttura dei tassi e su Arbitraggio

02 Maggio 2023

1) Siano $V(0; x_1) = 97,20 \text{ €}$ e $V(0; x_2) = 107,40 \text{ €}$ i prezzi di mercato al tempo $t = 0$ di due ZCB con valori di rimborso $x_1 = 98,30 \text{ €}$ e $x_2 = 109,65 \text{ €}$, esigibili ai tempi $t_1 = 121$ giorni e $t_2 = 211$ giorni. Sia inoltre presente sul mercato un contratto a termine stipulato in $t = 0$ che prevede lo scambio di 80 € all'istante $t_1 = 121$ giorni con $84,90 \text{ €}$ all'istante $t_3 = 312$ giorni.

Relativamente allo scadenziario $t = \{t_1, t_2, t_3\}$ calcolare la struttura per scadenza dei tassi di interesse a pronti e a termine uniperiodali corrispondenti alla struttura dei prezzi assegnati, esprimendo i tassi su base annua (si ipotizzi per l'anno la durata civile)

Soluzione: $s_{t_1} = 3,45280\%$, $s_{t_2} = 3,65169\%$, $s_{t_3} = 8,62286\%$; $f_{t_1, t_2} = 3,91969\%$, $f_{t_2, t_3} = 19,79090\%$.

2) Si consideri la seguente struttura dei tassi forward

$$f_{1,2} = 0,06 \quad f_{2,3} = 0,04.$$

Determinare la struttura dei tassi a pronti, essendo il prezzo di uno ZCB che scade tra un anno pari a 96.

Ricavare inoltre s_4 , sapendo che la precedente struttura si applica ad un BTP che scade tra 4 anni, prezzato alla pari, che paga cedole annue al tasso del 5%. Soluzione: $s_1 = 4,17\%$, $s_2 = 5,08\%$, $s_3 = 4,72\%$, $s_4 = 5,02\%$

3) Si consideri un mercato in cui sono quotati i seguenti titoli:

uno ZCB x con valore nominale pari a $\text{€ } 100$, scadenza tra un anno e prezzo di emissione di $\text{€ } 95$;

uno ZCB y con valore nominale pari a $\text{€ } 100$, con scadenza tra due anni e prezzo di emissione di $\text{€ } 91$;

uno ZCB z con valore nominale pari a $\text{€ } 50$, con scadenza tra tre anni e prezzo di emissione di $\text{€ } 44$;

Determinare l'intera struttura dei tassi spot e dei tassi forward indicando quali sono i tassi short.

Soluzione: $s_1 = 0.05263$, $s_2 = 0.048285$, $s_3 = 0.043532$; $f_{1,2} = 0.0439$, $f_{1,3} = 0.039$, $f_{2,3} = 0.0341$.

4) Si consideri un mercato a capitalizzazione continua in cui sono presenti i seguenti titoli:

- un BOT con scadenza tra un anno, valore facciale di $\text{€ } 2000$ e prezzo corrente di $\text{€ } 1970$;

- un BTP con scadenza tra due anni, valore facciale di € 1000, cedola annuale al tasso cedolare del 6% e prezzo corrente di € 1020;
- un BTP con scadenza tra tre anni, valore facciale di € 5000, cedola annuale al tasso cedolare del 8% e prezzo corrente di € 4196.

Determinare la struttura per scadenza dei tassi spot e dei tassi forward.

Soluzione: $s_1 = 1,5\%$, $s_2 = 4,9\%$, $s_3 = 15,04\%$; $f_{1,2} = 8,3\%$, $f_{1,3} = 21,81\%$, $f_{2,3} = 35,32\%$.

5) Si consideri un mercato in cui, al tempo 0, sono quotati i seguenti tre titoli (tutti riferiti a un facciale $C = 100$ €):

Un ZCB a pronti, con scadenza 3 anni, e prezzo $P = 90$ €;

Un ZCB a termine, con scadenza 3 anni, da pagare al tempo 2 anni e prezzo $P = 94$ €;

Un BTP a pronti, con scadenza 3 anni, cedola annuale, tasso cedolare del 3.55% e quotato alla pari.

Si calcoli in questo mercato il valore iniziale di una rendita posticipata di durata $m = 3$ rate annuali, tutte pari a $R = 600$ ed il prezzo di non arbitraggio di un BTP con valore facciale $F = 100$ €, di durata 3 anni e tasso cedolare del 7%.

Soluzione: Valore della rendita $V_0 = 1690,14$ €; Prezzo di BTP $P = 115,72$ €.

6) Data la struttura dei fattori di sconto a pronti

$$d_1 = 0.98, \quad d_2 = 0.97, \quad d_3 = 0.96, \quad d_4 = 0.955,$$

determinare:

(i) Il prezzo a pronti e a termine scambiato in $t = 1$ del flusso $x \setminus t = (10, 10, 110) | (2, 3, 4)$;

(ii) L'importo R per cui il flusso $x \setminus t = (-100, R, R) | (1, 2, 3)$ è equo in $t = 0$;

(iii) Il TAN che deve avere un titolo che paga cedole annuali e durata 3 anni per quotare alla pari.

Soluzione: Prezzo a pronti: $V_0 = 124,35$, Prezzo a Termine $V_1 = 126.8878$; valore della rata $R = 50,777$; TAN $\frac{C}{F} = 1.37457\%$.

7) Si consideri, nell'istante di valutazione $t = 0$, un mercato definito sullo scadenziario $t = \{t_1, t_2\} = \{0.5, 1\}$, essendo il tempo misurato in anni. Siano trattati sul mercato due titoli a cedola nulla x e y ed un contratto a termine z : il contratto x paga 100 euro in t_1 ed è scambiato in t a 98 euro; il contratto y paga 52 euro in t_2 con un prezzo in t di 49 euro; il contratto z paga 106 euro in t_2 , al prezzo a termine, pattuito in t e pagato in t_1 , di 100 euro. Verificare se sono possibili arbitraggi non rischiosi e costruire un'eventuale strategia di arbitraggio non rischioso.

8) I prezzi a pronti degli zero coupon bond unitari che scadono rispettivamente tra 5 e tra 10 anni sono $P_1 = 0,95$ e $P_2 = 0,93$. Il prezzo a termine, con consegna tra 5 anni, dello zero coupon bond

che scade tra 10 anni è $P_3 = 0,97$. Mostrare come effettuare un arbitraggio in modo da ricavare con certezza 1500 euro all'istante iniziale senza nessun esborso successivo, indicando quante quote degli zcb vanno acquistate/vendute a pronti/termine nei diversi istanti di tempo.

9) Sul mercato sono presenti i seguenti titoli

ZCB con durata residua 6 mesi e prezzo $P_1 = 98,53$;

ZCB con durata residua 12 mesi e prezzo $P_2 = 97,05$;

BTP con durata residua 18 mesi, cedola semestrale, $TAN = 4\%$ e prezzo $P_3 = 101,39$;

BTP con durata residua 24 mesi, cedola semestrale, $TAN = 6\%$ e prezzo $P_4 = 104,14$;

un titolo con prezzo $P = 405$ che offre il seguente flusso $(105, 105, 105, 103) \setminus (0.5, 1, 1.5, 2)$.

Stabilire se è possibile creare una strategia che genera un guadagno al tempo $t = 0$, e in tal caso descrivere la strategia.