1) Data la matrice

$$A=\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

dire se è invertibile e, in tale caso, individuare A^{-1}.

Sol

Poiché det(A)=1, A è non singolare, dunque invertibile.

$$Cof(A)=\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Dunque

$A^{-1}=Cof(A)$ (ma solo in tale caso!!).

2) Dato il sistema

$$\begin{cases} x-y+z=0 \\ -x+y-z=0 \\ 2x+y+5z=0 \\ 3x-y+5z=0 \end{cases}$$

determinare lo spazio delle soluzioni ed una base per esso.

Sol

Poiché

Rg$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} & & \begin{matrix} -1 \\ 5 \end{matrix} \\ 3 & -1 & 5 \end{pmatrix}$=2 (Verificare), il sistema è equivalente al seguente:

$\begin{cases} -x+y=z \\ 2x+y=-5z \end{cases}$,le cui soluzioni sono date da $\left\{ z\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ per cui una base è ad esempio $\left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

3)Dato l'insieme

$S=\{(1,-1),(-1,1),(2,1),(3,2)\}$

verificare che è costituito da vettori lin. dipendenti; esprimere uno di essi come combinazione lineare degli altri.

Sol

Poiché abbiamo 4 vettori in $\Re^2$, essi sono certamente dipendenti. Possiamo esprimere il primo vettore come c.l. degli altri; la combinazione è:

(1,-1)=-(-1,1)

4)Dato l'insieme

$S=\{(x,y)\in\Re^2 \mid x^2-y^2=0\}\subset\Re^2$

Verificare che non è sottospazio vettoriale di $\Re^2$.

Sol
Tale sottoinsieme di $\Re^2$ contiene i punti (1,1) e (1,-1); se S fosse sottospazio di $\Re^2$ dovrebbe contenere anche la loro somma, cioè (2,0) , ma ciò non accade.

5)Determinare per quali $k \in \Re$ il sistema è risolubile.

$$\begin{cases} -x+ky=2 \\ kx-y=-2 \\ 2x-2y=k \end{cases}$$

Sol
La CN di compatibilità è:

$\det\begin{pmatrix} -1 & k & 2 \\ k & -1 & -2 \\ 2 & -2 & k \end{pmatrix} = k^3+7k-8=(k-1)(k^2+k+8)=0$ la cui unica soluzione reale è k=1. Per ogni altro valore di k il sistema è ovviamente incompatibile.
Per k=1 si ha:

$\begin{cases} -x+y=2 \\ x-y=-2 \\ 2x-2y=1 \end{cases}$ quindi poiché $Rg(M_I)=1$ e $Rg(M_C)=2$ anche in tale caso il sistema non è compatibile.

6)Determinare il rango di A al variare di $k \in \Re$.

$$A=\begin{pmatrix} k & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -k & -2 \\ 2 & 0 & -2 & k \end{pmatrix}$$

Sol
Scelgo il minore dato dalle ultime due righe e dalle prime due colonne, cioè $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ che è non nullo. Orlando nei due modi possibili si ottiene:

$$\begin{vmatrix} k & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -k \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix} \equiv 0$$

$$\begin{vmatrix} k & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & k \end{vmatrix} = k(k-1)=0$$

Poiché entrambi i minori si annullano per k=0 o k=1, per tali valori il rango di A è 2, per tutti gli altri è 3.

7)Verificare che i punti (1,3), (2,5), (3,7) giacciono sulla stessa retta.
Sol
Poiché

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 3 & 7 & 1 \end{vmatrix} = 0$$ i tre pti sono allineati.

8)Determinare le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - y + z = 2 \\ 2x + 2z = 3 \end{cases}$$

Sol

Dal momento che $Rg(M_I) = Rg(M_C) = 2$, il sistema è compatibile; scelgo come minore non nullo di ordine max $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Il sistema equivalente è

$$\begin{cases} x + y = 1 - z \\ x - y = 2 - z \end{cases}$$

la cui soluzione è

$$\begin{cases} x = \frac{3}{2} - z \\ y = -\frac{1}{2} \\ z \in \Re \end{cases}$$