

1)

Calcolare la derivata di

$$f(x) = x^{\sqrt{x}}$$

Soluzione

Ricordando che

$$f(x) = e^{\sqrt{x} \log(x)}$$

si ha subito

$$f'(x) = x^{\sqrt{x}} \left( \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{\log(x)}{2\sqrt{x}} \right).$$

2) Calcolare il limite

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x-1)^{\log(x)}$$

Soluzione

Osserviamo, per la continuità di  $e^x$ , che

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x-1)^{\log(x)} = \lim_{x \rightarrow 1} e^{\log(x-1) \log(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow 1} \log(x-1) \log(x)}; \text{ d'altronde}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \log(x-1) \log(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\log(x-1)}{\frac{1}{\log(x)}} = \lim_{x \rightarrow 1} - \frac{x \log^2(x)}{x-1}; \text{ ora per}$$

calcolare questo limite calcoliamo:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\log^2(x)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2 \log(x)}{x} = 0$$

quindi

$$\lim_{x \rightarrow 1} \log(x-1) \log(x) = -0 \cdot 1 = 0$$

e dunque

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x-1)^{\log(x)} = e^0 = 1$$

3) Determinare lo sviluppo in serie di

$$f(x) = x \log(1+x)$$

nel punto  $x_0 = 0$

Soluzione

Osserviamo che  $f(0) = 0$ ;

d'altronde

$$f'(x) = \log(1+x) + \frac{x}{1+x} = \log(1+x) + 1 - \frac{1}{x+1} \Rightarrow f'(0) = 0$$

ed ancora

$$f''(x) = \frac{1}{1+x} + \frac{1}{(1+x)^2}$$

$$f'''(x) = \frac{-1}{(1+x)^2} + \frac{(-2)}{(1+x)^3}$$

$$f^{(4)}(x) = \frac{(-1)(-2)}{(1+x)^3} + \frac{(-2)(-3)}{(1+x)^4}$$

dunque per  $k \geq 2$

$$f^{(k)}(x) = (-1)^k \left[ \frac{(k-2)!}{(1+x)^{k-1}} + \frac{(k-1)!}{(1+x)^k} \right]$$

quindi

$$\begin{aligned} f^{(k)}(0) &= (-1)^k [(k-2)! + (k-1)!] = (-1)^k (k-2)!(1+k-1) = \\ &= (-1)^k (k-2)!k. \end{aligned}$$

ne segue che

$$\begin{aligned} \sum_{k \geq 0} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k &= \sum_{k \geq 2} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = \sum_{k \geq 2} \frac{(-1)^k (k-2)!k}{k!} x^k = \\ &= \sum_{k \geq 2} \frac{(-1)^k}{k-1} x^k. \end{aligned}$$

4)

Determinare i max/min rel ed ass in  $\mathfrak{R}$  di

$$f(x) = x^2 - \sqrt[3]{x^2}$$

Soluzione

Studiamo gli insiemi di crescenza di  $f$ .

$$f'(x) = \frac{6x\sqrt[3]{x} - 2}{3\sqrt[3]{x}};$$

$$6x^3\sqrt{x} - 2 \geq 0 \Leftrightarrow x^{\frac{4}{3}} \geq \frac{1}{3} \Leftrightarrow x^4 \geq \frac{1}{27} \text{ cioè}$$

$$x \in \left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt[4]{27}}\right) \cup \left(\frac{1}{\sqrt[4]{27}}, +\infty\right), \text{ mentre } \sqrt[3]{x} \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 0, \text{ quindi:}$$

$$f \text{ crescente in } \left(-\frac{1}{\sqrt[4]{27}}, 0\right) \text{ e in } \left(\frac{1}{\sqrt[4]{27}}, +\infty\right)$$

$$f \text{ decrescente in } \left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt[4]{27}}\right) \text{ e in } \left(0, \frac{1}{\sqrt[4]{27}}\right).$$

Tirando le somme  $x = \pm \frac{1}{\sqrt[4]{27}}$  sono punti di minimo assoluto, eguale a

$$f\left(\pm \frac{1}{\sqrt[4]{27}}\right) = -\frac{2}{3\sqrt{3}}; x = 0 \text{ è una cuspide e punto di massimo relativo, non assoluto}$$

in quanto  $f(0) = 0$  e  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = +\infty$ .

5) Determinare gli eventuali pti di flesso di

$$f(x) = \frac{x^4}{12} - \frac{x^3}{2} + x^2$$

Soluzione

$$f'(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{3}{2}x^2 + 2x$$

$$f''(x) = x^2 - 3x + 2$$

quindi  $f$  convessa in  $(-\infty, 1)$  e in  $(2, +\infty)$ , concava in  $(1, 2)$ , ed  $x = 1, x = 2$  punti di flesso.

6) calcolare la derivata di  $f(x, y) = \log(x + y^2)$  nel pto  $(x_0, y_0) = (2, 3)$

lungo la direzione del vettore  $(1, 5)$ .

Soluzione

$$f_x = \frac{1}{x + y^2} \Rightarrow f_x(x_0, y_0) = \frac{1}{11}$$

$$f_y = \frac{2y}{x+y^2} \Rightarrow f_y(x_0, y_0) = \frac{6}{11}$$

dunque

$$\frac{\partial f}{\partial v}(2,3) = \left(\frac{1}{11}, \frac{6}{11}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{26}} = \frac{31}{11\sqrt{26}}$$

7)

Determinare max/min relativi di

$$f(x, y) = x^2 + xy + y^3$$

Soluzione

$$\begin{cases} f_x = 2x + y = 0 \\ f_y = x + 3y^2 = 0 \end{cases} \begin{cases} y = -2x \\ x + 3(-2x)^2 = 0 \end{cases} \begin{cases} y = -2x \\ x + 12x^2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -2x \\ x(1 + 12x) = 0 \end{cases} \text{ da cui le soluzioni } \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \cup \begin{cases} x = -\frac{1}{12} \\ y = \frac{1}{6} \end{cases}$$

passiamo ora all'hessiano

$$f_{xx} = 2, f_{xy} = 1, f_{yy} = 6y \Rightarrow H(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix};$$

$\det(H(0,0)) = -1$ , punto di sella, mentre

$$H\left(-\frac{1}{12}, \frac{1}{6}\right) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det\left(H\left(-\frac{1}{12}, \frac{1}{6}\right)\right) = 2 - 1 = 1 > 0, f_{xx} > 0, \text{ questo ultimo punto è di}$$

minimo.

8)

Determinare max/min assoluti di

$$f(x, y) = x^2 + 3y^2$$

lungo il vincolo

$$x^2 + y^2 = 1$$

Soluzione

Usiamo la lagrangiana:

$$L = x^2 + 3y^2 + \lambda(x^2 + y^2 - 1)$$

$$\begin{cases} L_x = 2x + 2\lambda x = 0 \\ L_y = 6y + 2\lambda y = 0 \\ L_\lambda = x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

da cui

$$\begin{cases} 2x(1 + \lambda) = 0 \\ 2y(3 + \lambda) = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \text{ le cui soluzioni sono } \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \cup \begin{cases} x = 0 \\ y = \pm 1 \end{cases} \cup \begin{cases} x = \pm 1 \\ y = 0 \end{cases} \text{ di cui la}$$

prima non è ovviamente accettabile .

Quindi

$$f(0, \pm 1) = 3 \text{ è il max ass, mentre}$$

$$f(\pm 1, 0) = 1 \text{ è il min ass.}$$

9)

Determinare max/min relativi di

$$f(x, y) = x^2 + 3y^2$$

lungo

$$y = x^2$$

Soluzione

1° metodo

Sostituendo direttamente il vincolo nella funzione considerata, si ottiene

$$h(x) = f(x, y(x)) = x^2 + 3x^4$$

Studiando i massimi/minimi della h si ha:

$$h'(x) = 2x + 12x^3 = 2x(1 + 6x^2) \text{ quindi } h' > 0 \Leftrightarrow x > 0$$

Ed  $x = 0$  punto di min ass ( la  $f \geq 0$  sempre ).

2° metodo

Scriviamo la lagrangiana

$$L(\lambda, x, y) = x^2 + 3y^2 + \lambda(y - x^2) \text{ da cui si ottiene}$$

$$\begin{cases} L_x = 2x - 2x\lambda = 2x(1 - \lambda) = 0 \\ L_y = 6y + \lambda = 0 \\ L_\lambda = y - x^2 = 0 \end{cases}$$

La cui unica soluzione accettabile è

$$\begin{cases} \lambda = 0 \\ x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

E poiché

$$L_{\lambda\lambda} = 0 \quad L_{x\lambda} = -2x \quad L_{y\lambda} = 1$$

$$L_{xx} = 2 - 2\lambda \quad L_{xy} = 0 \quad L_{yy} = 6$$

Si ha

$$H_L = \begin{pmatrix} 0 & -2x & 1 \\ -2x & 2 - 2\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow H_L(0,0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

E poiché  $\det(H_L(0,0,0)) = -2 < 0$  siamo in presenza di un minimo, che è assoluto poiché, come già osservato,  $f \geq 0$ .

10)

Calcolare

$$\int \sqrt{x}(2^{\sqrt{x}})dx$$

Soluzione

Con la sostituzione  $\sqrt{x} = t$  si ottiene

$\int \sqrt{x}(2^x)dx = 2 \int t^2 2^t dt$  e quest'ultimo si integra per parti due volte (scegliendo come fattore finito sempre "la parte polinomiale in t") ottenendo

$$\frac{2 \cdot 2^t}{\log(2)} \left[ t^2 - \frac{2}{\log(2)} \left( t - \frac{1}{\log(2)} \right) \right] + k \text{ dalla quale si ottiene ovviamente}$$

$$\frac{2 \cdot 2^{\sqrt{x}}}{\log(2)} \left[ x - \frac{2}{\log(2)} \left( \sqrt{x} - \frac{1}{\log(2)} \right) \right] + k$$

11)

Dire se esiste, ed eventualmente calcolarlo, l'integrale improprio

$$\int_{-\infty}^0 e^{-x} dx$$

Soluzione

Dal momento che

$$\int e^{-x} dx = -e^{-x} + k$$

allora certamente

$$\int_t^0 e^{-x} dx = -e^{-x} + k \Big|_t^0 = e^{-t} - 1$$

e, poiché

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^0 e^{-x} dx = \lim_{t \rightarrow -\infty} e^{-t} - 1 = +\infty$$

L'integrale improprio non esiste.