0.1 Esercitazioni V, del 18/11/2008

Esercizio 0.1.1. Risolvere usando Cramer il seguente sistema lineare

$$\begin{cases} x + y - kz = 1 \\ kx + z = 2 \\ x + y - 2kz = 1 \end{cases}$$

Soluzione: Il determinante della matrice incompleta è k^2 che è diverso da zero se e soltanto se $k \neq 0$. Per tali valori di k il sistema ammette una ed una sola soluzione determinabile applicando il teorema di Cramer. Si ha

$$(x, y, z) = (\frac{2}{k}, \frac{k-2}{k}, 0)$$

Invece per $k = 0$ otteniamo il sistema

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ z = 2 \\ x + y = 1 \end{cases}$$

che ammette ∞^1 soluzioni: $(x, y, z) = (1 - t, t, 2)$.

Esercizio 0.1.2. Si considerino i seguenti vettori di $\mathbb{R}^3$: $v_1 = (1, 2, 2), v_2 = (0, 1, 1), v_3 = (1, 3, 2)$.

1. Mostrare che formano una base di $\mathbb{R}^3$.

2. Trovare le coordinate di $v = (2, 4, -1)$ nella nuova base $\{v_1, v_2, v_3\}$.

Soluzione

1. I tre vettori in questione sono linearmente indipendenti in quanto il determinante della matrice dei coefficienti è uguale a -1 e quindi è diverso da 0. Ricordando che n vettori linearmente indipendenti in $\mathbb{R}^n$ formano sempre una base, allora $\{v_1, v_2, v_3\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$.

2. Dobbiamo trovare tre numeri reali a, b, c tali che

$$a(1, 2, 2) + b(0, 1, 1) + c(1, 3, 2) = (2, 4, -1)$$

Ricordando che la precedente equazione vettoriale coincide col sistema

$$\begin{cases} a+c=2 \\ 2a+b+3c=4 \\ 2a+b+2c=-1 \end{cases}$$

troviamo che le coordinate di v rispetto alla base $\{v_1, v_2, v_3\}$ sono $(a, b, c) = (-3, -5, 5)$.

Esercizio 0.1.3. Determinare una base per lo spazio delle soluzioni del sistema omogeneo

$$\begin{cases} x+2y+t-z=0 \\ 2x-y+3t=0 \\ y+t-2z=0 \\ 3x+2y+5t-3z=0 \end{cases}$$

Soluzione: osserviamo che la quarta equazione è somma delle prime tre. Dunque possiamo eliminarla. Ponendo poi $z = h$ si arriva alla soluzione

$$S = \{(-\frac{5}{3}h, \frac{2}{3}h, \frac{4}{3}h, h), h \in \mathbb{R}\}$$

Ponendo allora $h = 1$ si ottiene la base $\{(-\frac{5}{3}, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}, 1)\}$.

Esercizio 0.1.4. Calcolare i seguenti limiti

1. $lim_{n\to\infty}\frac{2n^3-n+2}{3n^2+5n^3}$
2. $lim_{n\to\infty}e^{\frac{n+1}{n-1}}$
3. $lim_{n\to\infty}e^{\frac{1+n-n^2}{n^2+3}}$
4. $lim_{n\to\infty}\frac{e^{\frac{1}{n}}}{n}$

Soluzione:

1. Poichè numeratore e denominatore sono polinomi in n dello stesso grado, il limite coincide con il rapporto fra i coefficienti di grado superiore. Dunque esso è $2/5$.
2. Dal momento che l'esponente converge ad 1 (per il motivo vedi punto precedente) il limite richiesto è $e^1 = e$.

3. Dal momento che l'esponente converge a -1 il limite richiesto è e^{-1}.

4. Dal momento che $e^{1/n}$ è una successione positiva e decrescente, abbiamo

$$0 < e^{1/n} \leq e^1 = e$$

Dunque

$$0 < \frac{e^{1/n}}{n} \leq \frac{e}{n}$$

Dal momento che l'ultimo membro converge a 0, dal teorema dei carabinieri segue che anche il limite richiesto è nullo.

Esercizio 0.1.5. Dire quali delle seguenti serie è convergente. In caso affermativo calcolare la somma.

1. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n}$

2. $\sum_{n=0}^{\infty} (\frac{3}{4})^n$

3. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\pi^{n-1}}{e^n}$

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{n-1}}{\pi^n}$

Soluzione: si tratta di serie geometriche. Dunque bisogna capire volta per volta quale è la ragione q. Ci sarà allora convergenza se e solo se $|q| < 1$ e la somma sarà data dalla nota formula $\frac{1}{1-q}$. Vediamo allora cosa succede caso per caso.

1. Chiaramente $q = 1/3 < 1$. Quindi la serie converge a

$$\frac{1}{1 - 1/3} = 3/2$$

2. Chiaramente $q = 3/4 < 1$, dunque la serie converge a

$$\frac{1}{1 - 3/4} = 4$$

3. Si ha

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\pi^{n-1}}{e^n} = \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\pi^n}{e^n} = \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (\frac{\pi}{e})^n$$

Quindi, a meno del fattore $1/\pi$ si tratta della serie geometrica di ragione $q = \frac{\pi}{e} > 1$. Quindi la serie diverge.

4. Analogamente al punto 3) la serie in questione equivale a

$$\frac{1}{e}\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{e}{\pi})^n$$

Questa volta la ragione è $q = \pi/e < 1$. Quindi, tenendo conto che bisogna sottrarre 1 in quanto l'indice di sommatoria parte da 1, la serie converge a

$$\frac{1}{e}\frac{1}{(}1-\frac{e}{\pi}-1) = \frac{1}{\pi - e}$$

Esercizio 0.1.6. Determinare il carattere delle seguenti serie

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+n}{n^2}$
2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$
3. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{5^n}{(2n+1)!}$

Soluzione:

1. Abbiamo
$$\sum \frac{1+n}{n^2} \geq \sum \frac{1}{n} = \infty$$
Dunque la serie è divergente per il criterio del confronto.

2. Applichiamo il criterio del rapporto. Ricordiamo che, ponendo $a_n = \frac{n!}{n^n}$, il criterio del rapporto consiste nello studiare il limite della successione $\frac{a_{n+1}}{a_n}$. Se tale limite è < 1 ci sarà convergenza, se invece è maggiore di 1 ci sarà divergenza, se infine è uguale ad 1 bisogna ricorrere ad altri metodi. Si ha
$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!n^n}{n!(n+1)^{n+1}} = \frac{(n+1)n^n}{(n+1)^{n+1}} = \frac{n^n}{(n+1)^n} = (\frac{n}{n+1})^n =$$
$$= (\frac{1}{1+\frac{1}{n}})^n \to 1/e < 1$$
Quindi la serie converge.

3. Applichiamo nuovamente il criterio del rapporto. Abbiamo
$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(2n+1)!5^{n+1}}{(2(n+1)+1)!5^n} = \frac{5}{(2n+3)(2n+2)} \to 0 < 1$$
Quindi la serie converge.

Esercizio 0.1.7. Studiare, al variare di $x > 0$, il carattere della seguente serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 n!}{x^n}$$

Soluzione: Si potrebbe rispondere subito che la serie è divergente in quanto il termine generico non è infinitesimo. Senza ricorrere a tali raffinatezze, applichiamo il criterio della radice. Ricordiamo che dobbiamo studiare il limite della successione $\sqrt[n]{a_n}$. Se tale limite è < 1 la serie converge; invece la serie diverge se il limite è > 1; infine bisogna ricorrere ad altri metodi se il limite è proprio uguale ad 1. In questo caso si ha

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\frac{n^2 n!}{x^n}} \geq \sqrt[n]{\frac{n!}{x^n}} = \frac{\sqrt[n]{n!}}{x}$$

Ricordando allora il limite notevole $\sqrt[n]{n!} = \infty$, otteniamo allora che

$$lim \sqrt[n]{a_n} = \infty$$

indipendentemente da x. Quindi la serie è divergente per ogni x.