

## 0.1 ESERCIZI DI NATALE

**Esercizio 0.1.1.** Risolvere, al variare del parametro reale  $k$ , i seguenti sistemi lineari

1.

$$\begin{cases} x - y - z = 1 \\ 3x + y + 2z = -1 \\ 4x + kz = 0 \end{cases}$$

2.

$$\begin{cases} -x + y + z = 2 \\ x - y = 1 \\ kx - 2y - 2z = 0 \end{cases}$$

3.

$$\begin{cases} 2kx - y + kz = 1 \\ ky + z = 0 \\ x + z = 2 \end{cases}$$

**Esercizio 0.1.2.** Siano dati i seguenti insiemi di vettori in  $\mathbb{R}^3$ .

$$S_1 = \{v_1 = (1, 2, 3), v_2 = (1, 1, 1), v_3 = (2, 3, 4)\}$$

$$S_2 = \{w_1 = (1, 2, 3), v_2 = (1, 0, 1), v_3 = (1, 3, 4)\}$$

$$S_3 = \{u_1 = (1, 2, 3), u_2 = (2, 2, 2), u_3 = (-1, 0, -1), u_4 = (0, 0, 1)\}$$

1. Dire quale fra gli insiemi  $S_1, S_2, S_3$  costituisce una base per  $\mathbb{R}^3$ .
2. Esprimere il vettore  $(1, 1, 1)$  rispetto alle basi trovate nel punto 1.

**Esercizio 0.1.3.** Sia  $S$  lo spazio delle soluzioni del sistema omogeneo

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + 4x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_4 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \\ -x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases}$$

1. Determinare una base per  $S$ .
2. Dire quale fra i seguenti vettori è ortogonale ad  $S$ :  $v = (1, 0, 0, 1)$ ,  $w = (1, 0, 0, -2)$ .

**Esercizio 0.1.4.** Sia  $S$  lo spazio delle soluzioni del sistema omogeneo

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 0 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ 3x_1 + x_3 + 2x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

Determinare  $S^\perp$ , cioè tutti i vettori ortogonali ad  $S$ .

**Esercizio 0.1.5.** Studiare il carattere, al variare di  $x > 0$ , delle seguenti serie.

1.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^n}{n+1}$
2.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^n}{n^2+1}$
3.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^n}{n^3+1}$
4.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 7^{n+2} x^n}$
5.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n 3^{n-1} x^n}$
6.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2} 2^n x^n}$
7.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 \lg(n^2) x^n}$

**Esercizio 0.1.6.** Studiare il grafico delle seguenti funzioni

1.  $f(x) = x^2 - 2x$
2.  $f(x) = x(x^2 - 1)^2$
3.  $f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 1}$
4.  $f(x) = e^{-x} \sin x$
5.  $f(x) = x^2 e^x$
6.  $f(x) = \frac{\ln(x)}{x^2}$
7.  $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$
8.  $f(x) = x - \sqrt[3]{x}$

Per le funzioni 1,5,7,8 calcolare l'area sottesa dal grafico e compresa fra le ascisse  $x_0 = 0$  e  $x_1 = 1$ .

**Esercizio 0.1.7.** Dare un esempio di

1. funzione integrabile
2. funzione non continua, ma integrabile
3. funzione non integrabile
4. funzione (di due variabili) continua
5. funzione (di due variabili) derivabile parzialmente
6. funzione (di due variabili) derivabile lungo tutte le direzioni
7. funzione (di due variabili) derivabile parzialmente ma non continua
8. funzione (di due variabili) derivabile lungo tutte le direzioni, ma non continua.