Soluzioni Esercitazione del $6-10-2009$

Per qualunque dubbio, informazione eccetera scrivere a: capraro@mat.uniroma2.it

Esercizio 1. Risolvere le seguenti equazioni

1. $7x - \frac{3}{4}(1-2x) + 2x(x-1) = 3x(\frac{2}{3}x - 1) + 7$
2. $\frac{1-3x}{3x+9} + \frac{7x}{6x+18} = \frac{5x-1}{2x+6}$
3. $\frac{x+1}{x-2} + \frac{x-1}{x+2} = \frac{2(x^2+2)}{x^2-4}$
4. $\frac{1}{3x+4} + \frac{8}{9x^2-16} = -\frac{5}{3x-4}$

Soluzioni (ovviamente scrivo solo condizione di esistenza e risultato finale (sperando che sia giusto!)).

1. $x = \frac{31}{38}$
2. C.E. $x \neq -3$. Sol. $x = \frac{5}{14}$,
3. C.E. $x \neq \pm 2$. Sol. indeterminata.
4. C.E. $x \neq \pm\frac{4}{3}$. Impossibile a causa di C.E.

Esercizio 2. Risolvere le seguenti disequazioni

1. $\frac{3x}{x-6} \geq 8$
2. $(2x-1)(x+3) < 0$
3. $\frac{2x+5}{3x-1} \leq 4$

Soluzione:

1. $6 < x \leq \frac{48}{5}$
2. $-3 < x < \frac{1}{2}$
3. $x < \frac{1}{3} \vee x \geq \frac{9}{10}$

Esercizio 3. Risolvere le seguenti equazioni e disequazioni con modulo

1. $|2x-3| = 5$
2. $|x+3| + |3x+2| = 7$
3. $|\frac{x-6}{2}| < 1$
4. $|x+3| + |x-1| < 4$

Soluzione (risolvo in qualche dettaglio solo le prime due):

1. L'argomento del modulo è non negativo per $x \geq \frac{3}{2}$. Il primo caso è allora

$$\begin{cases} x \geq \frac{3}{2} \\ 2x - 3 = 5 \end{cases}$$

La soluzione della seconda equazione è $x = 4$, e quindi accettabile (confrontare con prima disequazione).

Il secondo caso è

$$\begin{cases} x < \frac{3}{2} \\ -2x + 3 = 5 \end{cases}$$

la soluzione dell'equazione è $x = -1$, anch'essa accettabile.

Riassumendo le soluzioni sono $x = -1, 4$.

2. Lo studio dei segni degli argomenti dei moduli porta a distinguere tre casi:

   (a) $x \leq -3$, in cui entrambi i moduli sono negativi e quindi si ha

$$\begin{cases} x \leq -3 \\ -x - 3 - 3x - 2 = 7 \end{cases}$$

   la soluzione dell'equazione è $x = -3$, che è accettabile.

   (b) $-3 < x \leq -\frac{2}{3}$, in cui il primo modulo è positivo ed il secondo negativo. Quindi

$$\begin{cases} -3 < x \leq -\frac{2}{3} \\ x + 3 - 3x - 2 = 7 \end{cases}$$

   La soluzione dell'equazione è $x = -3$ che questa volta non è accettabile. (si noti che se avessimo invertito gli uguali, la precedente soluzione l'avremmo trovata ora, ancora a dimostrare la possibilità di mettere gli uguali dove si preferisce).

(c) $x > -\frac{2}{3}$, dove entrambi i moduli sono positivi. Quindi

$$\begin{cases} x > -\frac{2}{3} \\ x + 3 + 3x + 2 = 7 \end{cases}$$

La soluzione dell'equazione è $x = \frac{1}{2}$, che è accettabile.

Riassumendo le soluzioni sono $x = -3, \frac{1}{2}$.

3. $4 < x < 8$

4. impossibile.

Esercizio 4. Svolgere le seguenti divisioni fra polinomi:

1. $(x^5 - 3x^2 - 4) : (x^2 - 3)$

2. $(3x^7 - 4x^3 + 9) : (x^6 + 8x - 1)$

Soluzione (indico con $q(x)$ il quoziente e con $r(x)$ il resto).

1. $q(x) = x^3 + 3x - 3$, $r(x) = 9x - 13$.

2. $q(x) = 3x$, $r(x) = -4x^3 - 24x^2 + 3x + 9$.

Esercizio 5. Usare Ruffini e la formula risolutiva delle equazioni di secondo grado per fattorizzare i seguenti polinomi in $\mathbb{R}$.

1. $x^3 - 3x^2 + 2x + 24$

2. $2x^3 - 5x - 39$

Soluzione

1. Osservare che $x = -2$ è radice del polinomio. Applicando Ruffini otteniamo: $(x^2 - 5x + 12)(x + 2)$. Si noti ora che il primo fattore non è ulteriormente fattorizzabile in $\mathbb{R}$, in quanto ha $\Delta < 0$. Quindi la fattorizzazione richiesta è proprio $(x^2 - 5x + 12)(x + 2)$.

2. Osservare che $x = 3$ è radice del polinomio. Applicando Ruffini otteniamo: $(2x^2 + 6x + 13)(x - 3)$. Si noti ora che il primo fattore non è ulteriormente fattorizzabile in $\mathbb{R}$, in quanto ha $\Delta < 0$. Quindi la fattorizzazione richiesta è proprio $(2x^2 + 6x + 13)(x - 3)$.

Esercizio 6. Mostrare che ogni insieme infinito contiene un insieme numerabile.

Soluzione: Sia X il nostro insieme infinito. Scegliamo $x_1 \in X$ e consideriamo $X_1 = X \setminus \{x_1\}$, questo insieme è non vuoto, in quanto X è infinito. Possiamo dunque scegliere $x_2 \in X_1$. Sia ora $X_2 = X \setminus \{x_1, x_2\}$. Esso è ancora non vuoto sempre perchè X è infinito. Possiamo allora scegliere $x_3 \in X_2$.Dal momento che X è infinito possiamo seguire questo ragionamento ad infinitum e trovare che l'insieme numerabile $\{x_1, x_2, x_3, ...\}$ è contenuto in X.

Esercizio 7. Mostrare che $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Soluzione: per assurdo sia $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$, con a, b interi coprimi (cioè senza divisori in comune! Si tratta semplicemente della storica riduzione ai minimi termini di una frazione!). Con due ovvi passaggi abbiamo $2b^2 = a^2$, da cui segue che a^2 è divisibile per 2 e quindi anche per 4 (è una cosa ovvia!! se un quadrato è divisibile per p è divisibile anche per p^2!). Quindi $a^2 = 4c$ e sostituendo: $2b^2 = 4c$ e quindi $b^2 = 2c$, da cui segue che ANCHE b è pari. Abbiamo allora ottenuto la contraddizione che a e b sono entrambi divisibili per 2.