

Esercitazione del 13 – 10 – 2009

Per informazioni, dubbi eccetera scrivere a capraro@mat.uniroma2.it

Esercizio 1. Risolvere le seguenti equazioni e disequazioni

1.

$$\frac{1-7x}{6x+6} + \frac{2x^2-3x-45}{4x^2-4} = \frac{2x+1}{3-3x}$$

2.

$$\frac{x+4}{x-3} < 2$$

3.

$$\left| \frac{2x-1}{5} \right| > 3$$

4.

$$|x-1| - 2|x+3| + x + 7 \leq 0$$

Esercizio 2. Studiare il segno del polinomio $p(x) = x^3 - x^2 - x - 2$.

(Suggerimento: trovare uno zero del polinomio. Sia a tale zero. Usare Ruffini per fattorizzare $p(x) = q(x)(x-a)$. Mostrare che $q(x) > 0$ per ogni x e dedurre che $p(x) \geq 0$ se e solo se $x \geq a$.)

Esercizio 3. Studiare il segno del polinomio $p(x) = x^3 - 7x + 6$. (Attenzione che $q(x)$ non è sempre positivo come nell'esercizio precedente! Se non ci si ricorda come si studia il segno di un polinomio di secondo grado (tramite la parabola associata!) ricordarsi almeno che se x_1, x_2 sono le radici di $ax^2 + bx + c$, allora $ax^2 + bx + c = a(x-x_1)(x-x_2)$.)

Esercizio 4. Calcolare i determinanti delle seguenti matrici

1.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

2.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

3.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Esercizio 5. Dire se i seguenti vettori di \mathbb{R}^3 sono linearmente dipendenti o indipendenti.

1. $v_1 = (1, 0, 1), v_2 = (1, 0, 3), v_3 = (0, 1, -1)$

2. $v_1 = (1, 2, 1), v_2 = (-2, 1, 0), v_3 = (-1, 3, 1)$

Esercizio 6. Siano dati i seguenti vettori in \mathbb{R}^2 :

$$v_1 = (1, 1), v_2 = (2, 3), v_3 = (1, -1)$$

Esprimere v_3 come combinazione lineare di v_1 e v_2 . Per i più intraprendenti: mostrare che tre vettori in \mathbb{R}^2 sono sempre linearmente dipendenti.

Esercizio 7. Scrivere il vettore $(0, 3, 2)$ come combinazione lineare di $(2, 1, 1)$, $(3, 1, -2)$ e $(-1, 2, -3)$

Esercizio 8. Risolvere al variare del parametro reale k il seguente sistema lineare

$$\begin{cases} kx + y - z = 1 \\ x + 2z = -2 \\ 3x + y + 2z = -5 \end{cases}$$

Esercizio 9. Sia A una matrice quadrata di ordine 3. Mostrare che esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che $\det(A - \lambda I) = 0$.

Esercizio 10. Dimostrare il teorema di Ruffini, il cui enunciato ricordo essere: un polinomio $p(x)$ è divisibile per $x - a$ se e soltanto se a è uno zero del polinomio.

(Suggerimento: dalla divisione fra polinomi possiamo comunque scrivere $p(x) = q(x)(x - a) + r(x)$...)