**SoluzioniEsercitazione del $13 - 10 - 2009$**

Per informazioni, dubbi eccetera scrivere a capraro@mat.uniroma2.it

**Esercizio 1.** Risolvere le seguenti equazioni e disequazioni

1. $$\frac{1-7x}{6x+6}+\frac{2x^2-3x-45}{4x^2-4}=\frac{2x+1}{3-3x}$$

2. $$\frac{x+4}{x-3}<2$$

3. $$\left|\frac{2x-1}{5}\right|>3$$

4. $$|x-1|-2|x+3|+x+7\leq 0$$

Soluzioni:

1. $x=7$
2. $x<3 \vee x>10$
3. $x<-7 \vee x>8$
4. $x\leq -7 \vee x\geq 1$

**Esercizio 2.** Studiare il segno del polinomio $p(x)=x^3-x^2-x-2$.
(Suggerimento: trovare uno zero del polinomio. Sia $a$ tale zero. Usare Ruffini per fattorizzare $p(x)=q(x)(x-a)$. Mostrare che $q(x)>0$ per ogni $x$ e dedurre che $p(x)\geq 0$ se e solo se $x\geq a$.

Soluzione: $p(2)=0$, quindi $p(x)$ è divisibile per $x-2$ e si ottiene $p(x)=(x-2)(x^2+x+1)$. Si noti ora che il polinomio di secondo grado ha $\Delta<0$ ed $a>0$, quindi è sempre positivo. Dalla regola dei segni del prodotto segue allora che $p(x)>0$ per $x>2$, $p(x)=0$ solo per $x=2$ e $p(x)<0$ per $x<2$.

**Esercizio 3.** Studiare il segno del polinomio $p(x) = x^3 - 7x + 6$. (Attenzione che $q(x)$ non è sempre positivo come nell'esercizio precedente! Se non ci si ricorda come si studia il segno di un polinomio di secondo grado (tramite la parabola associata!) ricordarsi almeno che se $x_1, x_2$ sono le radici di $ax^2 + bx + c$, allora $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$).

Soluzione: applicando Ruffini a gogò si trova $p(x) = (x - 1)(x - 2)(x + 3)$. Dalla regola dei segni del prodotto segue allora che $p(x) > 0$ per $-3 < x < 1 \vee x > 2$, $p(x) = 0$ per $x = -3, 1, 2$ e $p(x) < 0$ per $x < -3 \vee -1 < x < 2$.

**Esercizio 4.** Calcolare i determinanti delle seguenti matrici

1. $$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

2. $$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

3. $$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Soluzione:

1. viene 5

2. viene 11

3. conviene scegliere la quarta colonna, ma... fate come vi pare. Comunque viene 12.

**Esercizio 5.** Dire se i seguenti vettori di $\mathbb{R}^3$ sono linearmente dipendenti o indipendenti.

1. $v_1 = (1, 0, 1), v_2 = (1, 0, 3), v_3 = (0, 1, -1)$

2. $v_1 = (1, 2, 1), v_2 = (-2, 1, 0), v_3 = (-1, 3, 1)$

Soluzione: ricordo che $n$ vettori in $\mathbb{R}^n$ sono linearmente indipendenti se e solo se la matrice delle loro componenti ha determinante diverso da zero. Quindi

1. $$det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = -2 \neq 0$$

   quindi i primi tre vettori sono indipendenti.

2. $$det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} = 0$$

   e quindi sono dipendenti. Si noti che, senza calcolare il determinante, si sarebbe potuto osservare che $v_3 = v_1 + v_2$ e quindi sono linearmente dipendenti grazie al teorema: $m$ vettori in $\mathbb{R}^n$ sono linearmente dipendenti se e soltanto se almeno uno di essi si può scrivere come combinazione lineare degli altri.

**Esercizio 6.** Siano dati i seguenti vettori in $\mathbb{R}^2$:

$$v_1 = (1, 1), v_2 = (2, 3), v_3 = (1, -1)$$

Esprimere $v_3$ come combinazione lineare di $v_1$ e $v_2$. Per i più intraprendenti: mostrare che tre vettori in $\mathbb{R}^2$ sono sempre linearmente dipendenti.

Soluzione: si cercano due numeri reali $a, b$ tali che $v_3 = av_1 + bv_2$, cioè tali che

$$a(1, 1) + b(2, 3) = (1, -1)$$

ovvero (applicando la linearità del prodotto fra un vettore e uno scalare)

$$(a, a) + (2b, 3b) = (1, -1)$$

cioè (applicando la linearità della somma fra vettori)

$$(a + 2b, a + 3b) = (1, -1)$$

Ciò equivale, usando il principio di identità fra vettori (due vettori sono uguali se e soltanto se hanno le componenti ordinatamente uguali) al sistema

$$\begin{cases} a+2b=1 \\ a+3b=-1 \end{cases}$$

la cui soluzione è evidentemente $(a,b) = (5,-2)$. La combinazione lineare richiesta è quindi

$$v_3 = 5v_1 - 2v_2$$

Per i più intraprendenti ... costruire la matrice delle componenti dei tre vettori. Si tratta di una matrice $3\times 2$, in quanto abbiamo tre vettori ciascuno con due componenti. Ricordiamo ora che il massimo numero di vettori indipendenti è dato dal rango della matrice, il quale non può essere maggiore di due.

**Esercizio 7.** Scrivere il vettore $v = (0,3,2)$ come combinazione lineare di $v_1 = (2,1,1)$, $v_2 = (3,1,-2)$ e $v_3(-1,2,-3)$

Soluzione: si cercano tre numeri reale $a,b,c$ tali che $v = av_1 + bv_2 + cv_3$, cioè tali che (dagli stessi passaggi dell'esercizio precedente)

$$(0,3,2) = (2a+3b-c, a+b+2c, a-2b-3c)$$

Applicando il principio di identità dei vettori si perviene al sistema

$$\begin{cases} 2a+3b-c=0 \\ a+b+2c=3 \\ a-2b-3c=2 \end{cases}$$

che possiamo risolvere usando Cramer. Infatti la matrice dei coefficienti è

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

il cui determinante è $20 \neq 0$ (quindi possiamo applicare Cramer!!). Consideriamo le seguenti matrici

$$A_a = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$A_b = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$A_c = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Ricordiamo che Cramer ci garantisce che l'unica soluzione del sistema è data dalla terna $(a, b, c)$ con

$$x = \frac{det(A_a)}{det(A)} \quad y = \frac{det(A_b)}{det(A)} \quad z = \frac{det(A_c)}{det(A)}$$

Calcolando allora i determinanti si trova che l'unica soluzione del sistema è data dalla terna $(a, b, c) = (\frac{47}{20}, -\frac{5}{4}, \frac{19}{20})$. Quindi la combinazione lineare richiesta è

$$v = \frac{47}{20}v_1 + -\frac{5}{4}v_2 + \frac{19}{20}c$$

**Esercizio 8.** Risolvere al variare del parametro reale $k$ il seguente sistema lineare

$$\begin{cases} kx + y - z = 1 \\ x + 2z = -2 \\ 3x + y + 2z = -5 \end{cases}$$

Soluzione: consideriamo la matrice dei coefficienti

$$A_k = \begin{pmatrix} k & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

il cui determinante è $3 - 2k$, che è diverso da 0 per $k \neq \frac{3}{2}$. Quindi per $k \neq \frac{3}{2}$, il teorema di Cramer garantisce che abbiamo un'unica soluzione che si può calcolare col solito procedimento (vedi esercizio precedente). Si trova che la soluzione è

$$(x, y, z) = (-\frac{6}{3-2k}, \frac{6k+3}{3-2k}, \frac{2k}{3-2k})$$

Resta il caso $k = \frac{3}{2}$, che si svolge mediante sostituzione diretta. Sostituendo e moltiplicando la prima equazione per 2 si ottiene quindi il sistema

$$\begin{cases} 3x + 2y - 2z = 2 \\ x + 2z = -2 \\ 3x + y + 2z = 5 \end{cases}$$

Dalla seconda equazione si ricava $x = -2 - 2z$, che sostituita nelle altre due dà $y - 4z = 4$ e $y - 4z = 11$, che sono evidentemente contraddittorie. Quindi per $k = \frac{3}{2}$ il sistema non ammette soluzioni.

**Esercizio 9.** Sia $A$ una matrice quadrata di ordine 3. Mostrare che esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che $det(A - \lambda I) = 0$.

Soluzione: sia genericamente

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

quindi

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} a - \lambda & b & c \\ d & e - \lambda & f \\ g & h & i - \lambda \end{pmatrix}$$

Senza calcolare esplicitamente il determinante, si riconosce che esso è un polinomio di terzo grado nella variabile $\lambda$. La tesi si ottiene allora ricordando che un polinomio reale di grado dispari ha sempre uno zero reale.

**Esercizio 10.** Dimostrare il teorema di Ruffini, il cui enunciato ricordo essere: un polinomio $p(x)$ è divisibile per $x - a$ se e soltanto se $a$ è uno zero del polinomio.
(Suggerimento: dalla divisione fra polinomi possiamo comunque scrivere $p(x) = q(x)(x - a) + r(x)$...).

Soluzione: Cominciamo con l'implicazione: se $p(x)$ è divisibile per $x - a$, allora $p(a) = 0$. Infatti in questo caso la divisione non ha resto e quindi $p(x) = q(x)(x - a)$. Sostituendo $x = a$ si ottiene allora $p(a) = q(a)(a - a) = 0$.
Viceversa dobbiamo dimostrare che se $p(a) = 0$, allora $p(x)$ è divisibile per $x - a$. A tal fine facciamo la divisione di $p(x)$ con $x - a$, si ha $p(x) = q(x)(x - a) + r(x)$. Dobbiamo dimostrare che $r(x) = 0$. Osserviamo preliminarmante che $r(x)$ ha grado strettamente minore di $x - a$ e quindi è una costante. Per cui basta dimostrare che $r(x)$ vale 0 in un singolo valore. Più precisamente mostreremo che $r(a) = 0$. Infatti

$$0 = p(a) = q(a)(a - a) + r(a) = r(a)$$