0.1 Soluzioni Esercitazione III, del 21/10/2008

Esercizio 0.1.1. Risolvere il sistema lineare

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x+3y+2z=0 \\ x+2y-z=0 \end{cases}$$

Soluzione: Il determinante della matrice incompleta è -2 e quindi il sistema ammette un'unica soluzione. Andiamo a determinarla usando il metodo di Cramer. Si ha:

$$x = \frac{det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}}{-2} = \frac{7}{2}$$

$$y = \frac{det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}}{-2} = -2$$

$$z = \frac{det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}}{-2} = -\frac{1}{2}$$

Esercizio 0.1.2. Risolvere al variare del parametro k i seguenti sistemi lineari

1.
$$\begin{cases} x+y+kz=1 \\ x+z=0 \\ x+y+k^3z=3 \end{cases}$$

2.
$$\begin{cases} x+y+kz=2 \\ x+z=0 \\ x+y+z=1 \end{cases}$$

Soluzione:

1. La matrice incompleta ha determinante $k(1-k^2)$, che è diverso da zero per $k \neq 0, \pm 1$. Per tali valori di k possiamo applicare Cramer ed ottenere le soluzioni

$$(x, y, z) = (\frac{2}{k(1-k^2)}, \frac{-k^3 + 3k - 2}{k(1-k^2)}, -\frac{2}{k(1-k^2)})$$

Invece, per $k = 0, \pm 1$ bisogna lavorare direttamente sul sistema. Abbiamo quindi tre casi:

   (a) $k = -1$
   Il sistema diventa

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ x + z = 0 \\ x + y - z = 3 \end{cases}$$

   che è evidentemente incompatibile, in quanto la prima e la terza equazione non possono essere simultaneamente vere.

   (b) $k = 0$
   In questo caso il sistema diventa

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x + z = 0 \\ x + y = 3 \end{cases}$$

   Anche in questo caso non abbiamo soluzioni, sempre perchè la prima e la terza equazione non possono essere contemporaneamente vere.

   (c) In quest'ultimo caso il sistema diventa

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + z = 0 \\ x + y + z = 3 \end{cases}$$

   e quindi abbiamo incompatibilità anche in questo caso

Riassumendo, il sistema ha un'unica soluzione per $k \neq 0, \pm 1$ (trovata con Cramer) e risulta invece incompatibile per $k = 0, \pm 1$.

2. Il determinante della matrice incompleta è $k - 1$ che è diverso da 0 per $k \neq 1$. Per tali valori di k possiamo risolvere il sistema usando il metodo di Cramer. Si trovano

le soluzioni

$$(x, y, z) = \left(-\frac{1}{k-1}, 1, 1\right)$$

Invece, per $k = 1$ il sistema è incompatibile (confrontare prima e terza equazione).

Esercizio 0.1.3. Calcolare il rango delle seguenti matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Soluzione:

1. Ricordiamo che il rango di una matrice può essere definito anche come il massimo numero di colonne linearmente indipendenti. Osserviamo allora che la seconda e la terza colonna sono entrambe dipendenti dalla prima. Dunque ci sono al massimo due colonne indipendenti (la prima e la quarta). Esse sono effettivamente indipendenti (ad esempio osservando che il determinante della sottomatrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

è diverso da zero). In conclusione il $rg(A) = 2$.

2. $rg(B) = 2$ in quanto la sottomatrice ottenuta considerando solo le prime due colonne ha determinante $\neq 0$.

Esercizio 0.1.4. Determinare k in maniera che il rango della seguente matrice sia minimo.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 3 \\ k & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & k & -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Soluzione: osserviamo che $rg(A) \geq 2$ in quanto la sottomatrice

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

ha determinante non nullo. Dunque la domanda dell'esercizio si riduce alla seguente: esistono valori di k tali che $rg(A) = 2$? Andiamo a vedere le matrici orlate di B. Esse sono tre:

$$B_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ k & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ k & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

La prima ha sempre determinante $= 0$. La seconda ha determinante $= 0$ solo per $k = 1$. Anche la terza ha determinante $= 0$ solo per $k = 1$. In conclusione, $rg(A) = 2$ se e solo se $k = 1$ (dal teorema di Kronecker). Per gl'altri valori di k il rango è 3, in quanto $det(B_1) \neq 0$. Quindi $rg(A)$ è minimo solo per $k = 1$.

Esercizio 0.1.5. Usare Rouchè-Capelli per dire quale dei seguenti sistemi ha soluzione. In caso di esistenza dire quante sono e trovarle.

$$\begin{cases} 2x + y = 0 \\ x - y = 3 \\ x + 2y + z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ 2x + y = -1 \\ 3x + y = -3 \end{cases}$$

Soluzione:

1. Il rango della matrice incompleta è 3 in quanto ha determinante diverso da zero. Anche il rango della matrice completa è 3 in quanto esso è ≤ 3 ed ha un minore non nullo di ordine 3 (appunto la matrice incompleta). Per cui la soluzione esiste ed è unica. Per trovarla si può applicare Cramer oppure lavorare direttamente. Comunque la soluzione è

$$(x, y, z) = (1, -2, 3)$$

2. La matrice incompleta ha evidentemente rango 2, avendo ad esempio come minore non nullo quello della sottomatrice di ordine due ottenuta dalla matrice incompleta togliendo l'ultima riga. La matrice completa ha invece rango 3, in quanto ha determinante non nullo. Quindi, poichè $rg(A_i) < rg(A_c)$, il sistema è incompatibile.

Esercizio 0.1.6. Usare Cramer per mostrare che per ogni $a, b, c \in \mathbb{R}$ il seguente sistema ha soluzione unica.

$$\begin{cases} x + y + z = a \\ x - 2y - z = b \\ y + 2z = c \end{cases}$$

Soluzione: ricordiamo che il teorema di Cramer afferma che un sistema quadrato ha un'unica soluzione se e soltanto il determinante della matrice incompleta è diverso da 0. Effettivamente

$$det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = -4 \neq 0$$

Quindi il sistema ha effettivamente sempre una ed una sola soluzione, indipendemente dai parametri a, b, c.

Esercizio 0.1.7. Considerare i vettori di $\mathbb{R}^3$ $v_1 = (1, 1, 1), v_2 = (0, 1, 1)$ e $v_3 = (0, 0, 1)$.

1. Mostrare che formano una base.

2. Trovare le coordinate di $v = (2, 3, 2)$ rispetto alla nuova base $\{v_1, v_2, v_3\}$

Soluzione:

1. Ricordiamo che tre vettori in $\mathbb{R}^3$ formano una base se e soltanto se sono linearmente indipendenti. Per cui bisogna solo mostrare che v_1, v_2, v_3 sono linearmente indipendenti. Questo è ovvio in quanto

$$det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 \neq 0$$

2. Dal momento che $\{v_1, v_2, v_3\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$ esiste un'unica terna (a, b, c) tale che

   (*)
   $$v = av_1 + bv_2 + cv_3$$

   La terna (a, b, c) è formata esattamente dalle coordinate di v rispetto alla nuova base. Andiamo a calcolarla. L'equazione (*) è

   $$(2, 3, 2) = a(1, 1, 1) + b(0, 1, 1) + c(0, 0, 1)$$

   che equivale al sistema
   $$\begin{cases} a = 2 \\ a + b = 3 \\ a + b + c = 2 \end{cases}$$

   Abbiamo quindi le coordinate di v rispetto alla nuova base $\{v_1, v_2, v_3\}$ è $(a, b, c) = (2, 1, -1)$.

Esercizio 0.1.8. Considerare i vettori di $\mathbb{R}^3$ $v_1 = (2, 1, 1)$, $v_2 = (0, 1, 1)$, $v_3 = (1, 0, 2)$ e $v_4 = (2, 1, 3)$.

1. Estrarre una base dall'insieme $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$.

2. Esprimere i vettori della base canonica rispetto alla nuova base scelta.

Soluzione:

1. Ricordiamo che l'insieme $S = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ non può essere una base in quanto quattro vettori di $\mathbb{R}^3$ sono sempre linearmente indipendenti (si può dimostrare anche usando Rouchè-Capelli). Dunque bisogna trovare in S tre vettori linearmente indipendenti. Scegliamo ad esempio i primi tre vettori. Essi sono linearmente indipendenti in quanto
   $$det \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 5 \neq 0$$
   Quindi $\{v_1, v_2, v_3\}$ è una base (estratta da S) di $\mathbb{R}^3$.

2. Siano $e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0)$ ed $e_3 = (0,0,1)$ i vettori della base canonica. Per scrivere e_1 rispetto alla nuova base occorre trovare a_1, b_1, c_1 tali che

$$e_1 = a_1 v_1 + b_1 v_2 + c_1 v_3$$

cioè tali che

$$(1,0,0) = a_1(2,1,1) + b_1(0,1,1) + c_1(1,0,2)$$

Arriviamo quindi al sistema

$$\begin{cases} 2a_1 + c_1 = 1 \\ a_1 + b_1 = 0 \\ a_1 + b_1 + 2c_1 = 1 \end{cases}$$

Quindi $(a_1, b_1, c_1) = (1/2, -1/2, 0)$.
Analogamente si trova $(a_2, b_2, c_2) = (1/4, 3/4, -1/2)$ e $(a_3, b_3, c_3) = (-1/4, 1/4, 1/2)$.