0.1 Esercitazione IV, del 28/10/2008

Esercizio 0.1.1. Risolvere, usando il teorema di Cramer, i seguenti sistemi lineari.

1.
$$\begin{cases} 2x + y + z = 0 \\ x + 3z = 1 \\ x - y - z = 1 \end{cases}$$

2.
$$\begin{cases} kx + y - z = 1 \\ x - y + 2z = 1 \\ 2x + 2y - 3z = 0 \end{cases}$$

3.
$$\begin{cases} 2x - ky - z = 1 \\ x + ky - 3z = 1 \\ 2x - z = 0 \end{cases}$$

Esercizio 0.1.2. Dire, usando il teorema di Rouchè-Capelli, quale dei seguenti sistemi ha soluzione. In caso di esistenza di soluzioni dire quante sono e determinarle esplicitamente.

1.
$$\begin{cases} x + y + z + t = 1 \\ x + y - z - t = 1 \end{cases}$$

2.
$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - y = 1 \\ 2x + z = 1 \end{cases}$$

Esercizio 0.1.3. Si considerino i vettori di $\mathbb{R}^3$ $v_1 = (1, 2, 3), v_2 = (1, 0, 1)$ e $v_3 = (0, 2, 3)$.

1. Mostrare che formano una base di $\mathbb{R}^3$.

2. Trovare le coordinate di $v = (1, 1, 1)$ rispetto alla nuova base $\{v_1, v_2, v_3\}$.

Esercizio 0.1.4. Determinare una base per lo spazio delle soluzioni del sistema omogeneo

$$\begin{cases} x + y + t + z = 0 \\ x - y - t + z = 0 \\ x + z = 0 \\ y + t = 0 \end{cases}$$

Esercizio 0.1.5. Calcolare, quando esiste, l'inversa delle seguenti matrici.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Esercizio 0.1.6. Mostrare che se A e B sono matrici invertibili, allora anche AB è invertibile e l'inversa è $B^{-1}A^{-1}$. Mostrare con un controesempio che non è detto che $A + B$ sia invertibile.

Esercizio 0.1.7. Mostrare usando il teorema di Rouchè-Capelli che quattro vettori in $\mathbb{R}^3$ sono sempre linearmente dipendenti. Generalizzare mostrando che se $m > n$, allora m vettori in $\mathbb{R}^n$ sono sempre linearmente dipendenti.