0.1 Soluzioni esercitazione IV, del 28/10/2008

Esercizio 0.1.1. Risolvere, usando il teorema di Cramer, i seguenti sistemi lineari

$$\begin{cases} 2x + y + z = 0 \\ x + 3z = 1 \\ x - y - z = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} kx + y - z = 1 \\ x - y + 2z = 1 \\ 2x + 2y - 3z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x - ky - z = 1 \\ x + ky - 3z = 1 \\ 2x - z = 0 \end{cases}$$

Soluzione:

1. Il determinante della matrice incompleta è 9 e quindi il sistema ammette un'unica soluzione. Andiamo a determinarla usando il metodo di Cramer. Si ha:

$$x = \frac{det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & -11 \end{pmatrix}}{9} = \frac{1}{3}$$

$$y = \frac{det \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}}{9} = -\frac{8}{9}$$

$$z = \frac{det \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}}{-2} = \frac{2}{9}$$

2. La matrice incompleta ha determinante $3 - k$, che è diverso da zero solo per $k \neq 3$. Per tali valori di k possiamo applicare Cramer ed ottenere le soluzioni

$$(x, y, z) = (0, 3, 2)$$

Si noti che in questo particolare caso le soluzioni non dipendono da k in quanto k sta solo sulla x, che è nulla. Infine, per $k = 3$, la prima riga è somma delle altre due e quindi possiamo toglierla arrivando al sistema

$$\begin{cases} x - y + 2z = 1 \\ 2x + 2y - 3z = 0 \end{cases}$$

Ponendo allora $z = t$ si arriva a determinare le ∞^1 soluzioni

$$S_3 = \{(1/2 - t/4, 7/4t - 1/2, t), t \in \mathbb{R}\}$$

3. La matrice incompleta ha determinante $5k$, che è diverso da 0 solo per $k \neq 0$. Per tali valori di k le soluzioni si possono determinare con Cramer. Per $k = 0$ si vede invece subito che la prima e la terza equazione sono incompatibili.

Esercizio 0.1.2. Usare Rouchè-Capelli per dire quale dei seguenti sistemi ha soluzione. In caso di esistenza dire quante sono e trovarle.

$$\begin{cases} x + y + z + t = 1 \\ x + y - z - t = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - y = 1 \\ 2x + z = 1 \end{cases}$$

Soluzione:

1. Siano A_i e A_c rispettivamente la matrice incompleta e quella completa. Evidentemente $rg(A_i) = rg(A_c) = 2$. Dal momento che le incognite sono quattro il sistema ha allora ∞^2 soluzioni. Per determinarle esplicitamente poniamo $z = h$ e $t = k$. Abbiamo allora le soluzioni

$$S = \{(1, -h - k, h, k), h, k \in \mathbb{R}\}$$

2. $rg(A_i) = 2$ in quanto ha una sottomatrice di ordine 2 (ad esempio quella formata dalle prime due righe e dalle prime due colonne, che chiamo B) con determinante diverso da 0, mentre $det(A_i) = 0$. Anche $rg(A_c) = 2$ in quanto le due orlate di B hanno entrambe determinante nullo. Quindi, poichè le incognite sono tre, il sistema

ha ∞^1 soluzioni. Per determinarle possiamo osservare che la terza equazione è somma delle prime due e quindi possiamo toglierla. Arriviamo allora al sistema

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

che possiamo risolvere esplicitamente ponendo $z = t$. Otteniamo le soluzioni

$$S = \{(\frac{1-t}{2}, \frac{-1-t}{2}, t), t \in \mathbb{R}\}$$

Esercizio 0.1.3. Considerare i vettori di $\mathbb{R}^3$ $v_1 = (1, 2, 3), v_2 = (1, 0, 1)$ e $v_3 = (0, 2, 3)$.

1. Mostrare che formano una base.

2. Trovare le coordinate di $v = (1, 1, 1)$ rispetto alla nuova base $\{v_1, v_2, v_3\}$

Soluzione:

1. Formano una base in quanto la matrice delle coordinate

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

ha determinante $\neq 0$.

2. Come al solito l'esercizio consiste nel determinare tre numeri reali a, b, c tali che $av_1 + bv_2 + cv_3 = v$. Scrivendo questa equazione vettoriale in coordinate abbiamo

$$a(1, 2, 3) + b(1, 0, 1) + c(0, 2, 3) = (1, 1, 1)$$

che, con i soliti passaggi diventa

$$(a + b, 2a + 2c, 3a + b + 3c) = (1, 1, 1)$$

Dal momento che due vettori sono uguali se e solo se hanno le componenti ordinatamente uguali la precedente uguaglianza vettoriale equivale al sistema lineare

$$\begin{cases} a + b = 1 \\ 2a + 2c = 1 \\ 3a + b + 3c = 1 \end{cases}$$

che ha soluzione $(a, b, c) = (3/2, -1/2, -1)$. Queste sono le coordinate di v rispetto alla nuova base $\{v_1, v_2, v_3\}$.

Esercizio 0.1.4. Considerare i vettori di $\mathbb{R}^3$ $v_1 = (2,1,1)$, $v_2 = (0,1,1)$, $v_3 = (1,0,2)$ e $v_4 = (2,1,3)$.

1. Estrarre una base dall'insieme $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$.
2. Esprimere i vettori della base canonica rispetto alla nuova base scelta.

Esercizio 0.1.5. Determinare una base per lo spazio delle soluzioni del sistema omogeneo

$$\begin{cases} x + y + t + z = 0 \\ x - y - t + z = 0 \\ x + z = 0 \\ y + t = 0 \end{cases}$$

Osserviamo che le ultime due equazioni implicano che le prime due sono automaticamente soddisfatte (infatti la prima equazione è somma delle ultime due e la seconda è differenza delle ultime due). Quindi possiamo togliere le prime due equazioni ed arrivare al sistema

$$\begin{cases} x + z = 0 \\ y + t = 0 \end{cases}$$

che ha evidentemente ∞^2 soluzioni che possiamo determinare esplicitamente ponendo $z = h$ e $t = k$. Le soluzioni formano dunque lo spazio vettoriale

$$S = \{(-h, -k, h, k), h, k \in \mathbb{R}\}$$

Una base di S la possiamo trovare prendendo una volta $h = 1$ e $k = 0$ e l'altra prendendo $h = 0$ e $k = 1$. Troviamo quindi che una base di S è data $v_1 = (-1, 0, 1, 0)$ e $v_2 = (0, -1, 0, 1)$.

Esercizio 0.1.6. Calcolare, quando esiste, l'inversa delle seguenti matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Soluzione:

1. Dal momento che $det(A) = 1 \neq 0$, A ammette inversa, la quale può essere calcolata tramite la formula
$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)} Agg(A)^t$$
Andiamo a calcolare la matrice degli aggiunti $Agg(A)$. Si ha
$$Agg(A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$
e quindi
$$Agg(A)^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
e quindi
$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)} Agg(A)^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
2. Dal momento che $det(B) = 0$, B non ammette inversa.

Esercizio 0.1.7. Mostrare che se A e B sono matrici invertibili, allora anche AB è invertibile e risulta $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$. Mostrare con un controesempio che non è detto che $A + B$ sia invertibile.

Soluzione: basta fare la verifica. Denotiamo con I la matrice identità (tutti 1 sulla diagonale e zero altrove. Ricordiamo che questa matrice è l'elemento neutro per il prodotto fra matrici quadrate e che inoltre commuta con tutte le matrici) Da una parte si ha
$$AB(AB)^{-1} = ABB^{-1}A^{-1} = AIA^{-1} = IAA^{-1} = II = I$$
Dall'altra
$$(AB)^{-1}AB = B^{-1}A^{-1}AB = B^{-1}IB = IB^{-1}B = II = I$$
Quindi effettivamente AB è invertibile e la sua inversa è $B^{-1}A^{-1}$.
per quanto riguarda il controesempio, mettiamoci in dimensione due e prendiamo $A = I$ e $B = -I$. Esse sono sicuramente invertibili, in quanto hanno determinate uguale ad 1. Tuttavia $A + B$ é la matrice nulla, che non è invertibile, in quanto il suo determinante è nullo.

Esercizio 0.1.8. Mostrare usando Rouchè-Capelli che quattro vettori di $\mathbb{R}^3$ sono sempre linearmente dipendenti. Generalizzare mostrando che se $m > n$, allora m vettori in $\mathbb{R}^n$ sono sempre linearmente dipendenti.

Soluzione: siano v_1, v_2, v_3, v_4 tali vettori. Essi sono linearmente dipendenti se e soltanto se esistono numeri reali a, b, c, d non tutti nulli tali che $av_1 + bv_2 + cv_3 + dv_4 = 0$. Come al solito questo può essere pensato come un sistema lineare omogeneo con tre equazioni (perchè ogni vettore ha tre componenti!) e quattro incognite (che sarebbero a, b, c, d!). Ora, dal momento che la colonna dei termini noti è nulla, $rg(A_c) = rg(A_i)$ e questo è sicuramente $k = \leq 3$ (in quanto stiamo facendo il rango di matrici di ordine 3x4 oppure 3x5). Quindi, per il teorema di Rouchè-Capelli, il sistema ammette $\infty^{4-k} \geq \infty^1$ soluzioni. Poichè le soluzioni sono infinite, ce ne sarà almeno una non nulla.

Nel caso generale, basta ripercorrere il precedente ragionamento: questa volta abbiamo m vettori $v_1, ...v_m$ e si cercano m numeri reali $a_1, ...a_m$ non tutti nulli tali che $a_1v_1 + ...a_mv_m = 0$. Anche questo può essere considerato un sistema lineare di n equazioni (perchè ogni vettore ha n incognite) ed m incognite (che sarebbero $a_1, ...a_m$!). Come prima deve essere $rg(A_i) = rg(A_c)$ e quindi il sistema ammette soluzioni per il teorema di Rouchè-Capelli. E queste soluzioni, come prima, sono infinite (e quindi almeno una non nulla) in quanto $m > n$.