Esercitazione2 – 11 – 2009

Per informazioni, dubbi eccetera scrivere a capraro@mat.uniroma2.it

Esercizio 1. Risolvere al variare del parametro reale k i seguenti sistemi lineari

1. $$\begin{cases} kx - y + z = 2 \\ x - 2y + 2z = 1 \\ 3x - y - z = 1 \end{cases}$$

2. $$\begin{cases} kx + y = 1 \\ x + y + (1-k)z = k \\ y + z = 1 \end{cases}$$

Soluzione:

1. Il determinante della matrice dei coefficienti è $4k - 2$. Quindi è diverso da zero per $k \neq 1/2$. Per tali valori di k la soluzione è unica e calcolabile grazie al teorema di Cramer. Si ha
$$(x, y, z) = (\frac{3}{2k-1}, \frac{12-3k}{2(2k-1)}, \frac{8-k}{2(2k-1)})$$
Per $k = 1/2$ si moltiplica la prima equazione per 2 e si riconosce subito l'incompatibilità fra la prima e la seconda equazione. Dunque per $k = 1/2$ il sistema è impossibile.

2. Il determinante della matrice dei coefficienti è $k^2 - 1$. Quindi è diverso da zero per $k \neq \pm 1$. Per tali valori di k la soluzione è unica e calcolabile grazie al teorema di Cramer. Si ha
$$(x, y, z) = (-\frac{1}{k+1}, \frac{2k+1}{k+1}, -\frac{k}{k+1})$$
Per $k = 1$ si riconosce che la prima e la seconda equazione sono uguali e se ne può allora cancellare una. Ponendo $y = t$ si trovano le ∞^1 soluzioni
$$\{(1-t, t, 1-t), t \in \mathbb{R}\}$$
Per $k = -1$, ricavare x nella prima e z nella terza. Sostituire il tutto nella seconda. Si trova $-1 = 1$ e quindi il sistema è impossibile.

Esercizio 2. Siano dati i seguenti vettori in $\mathbb{R}^3$: $v_1 = (2, -1, 3), v_2 = (1, 4, 1), v_3 = (3, 3, 1)$.

1. Mostrare che formano una base di $\mathbb{R}^3$
2. Scrivere il vettore $v = (7, -1, -5)$ come combinazione lineare di v_1, v_2, v_3

Soluzione

1. Ricordando che n vettori in $\mathbb{R}^n$ formano una base se e solo se sono linearmente indipendenti e che ciò accade se e solo se la matrice delle loro componenti ha determinante diverso da zero, basta dimostrare quest'ultimo fatto. In effetti si ha
$$det \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} = -27 \neq 0$$
2. Occorre determinare tre numeri reali a, b, c tali che
$$v = av_1 + bv_2 + cv_3$$
Usando la linearità del prodotto scalare-vettore e della somma fra vettori e il principio di identità dei vettori si perviene al sistema lineare
$$\begin{cases} 2a + b + 3c = 7 \\ -2a + 4b + 3c = -1 \\ 3a + b + c = -5 \end{cases}$$
la cui soluzione, se non ho sbagliato i conti, è $(a, b, c) = (-\frac{50}{27}, -\frac{122}{27}, \frac{137}{27})$. Quindi la combinazione lineare richiesta è
$$v = -\frac{50}{27}v_1 - \frac{122}{27}v_2 + \frac{137}{27}v_3$$
lo so che fa schifo.. mais c'est la vie!

Esercizio 3. Sia dato il sistema omogeneo
$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 + 3x_4 = 0 \\ 2x_1 + 6x_2 - 2x_3 + 6x_4 = 0 \\ x_1 + 3x_4 = 0 \\ 3x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

1. Determinare una base per lo spazio delle soluzioni S.
2. Dire se il vettore $v = (1, 1, -3, 3)$ appartiene ad $S^\perp$.

Soluzione

1. Osserviamo che la prima equazione si ottiene sottraendo la quarta dalla terza. Invece la prima equazione si ottiene sommando la quarta alla terza e poi moltiplicando per due. Dunque le prime due equazioni si possono eliminare in quanto dipendenti dalle restanti. Ponendo poi $x_2 = h$ e $x_4 = k$ si ottiene
$$S = \{(3k, h, 3h, k), h, k \in \mathbb{R}\}$$
Una base per S si ottiene ponendo prima $h = 1$ e $k = 0$ e poi $h = 0$ e $k = 1$. Quindi
$$B = \{v_1 = (0, 1, 3, 0), v_2 = (3, 0, 0, 1)\}$$
2. Ricordando che un vettore è ortogonale ad un sottospazio se e soltanto se è ortogonale a ciascun vettore di una sua base, basta calcolare (v, v_1) e (v, v_2). Ricordiamo che $v \in S^\perp$ se e soltanto se entrambi i precedenti prodotti scalari sono nulli. Si ha
$$(v, v_1) = 1 - 9 = -8 \neq 0$$
e ciò è sufficiente a concludere che $v \notin S^\perp$.

Esercizio 4. Sia data la retta nel piano $r : 2x + 3y + 5 = 0$. Calcolare

1. La retta s parallela ad r e passante per il punto $(-2, 1)$.
2. La retta t perpendicolare ad r e passante per il punto $(-1, 4)$.
3. L'eventuale punto di intersezione fra s e t.

Soluzione: la forma esplicita della retta r è $y = -\frac{2}{3}x - \frac{5}{3}$, dunque il suo coefficiente angolare è $m_r = -\frac{2}{3}$. Di conseguenza $m_s = -\frac{2}{3}$ e $m_t = \frac{3}{2}$. Ricordiamo ora che la formula della retta passante per un punto (x_0, y_0) e avente un dato coefficiente angolare m è $y - y_0 = m(x - x_0)$.

1. $s : 2x + 3y + 1 = 0$

2. $t : 3x - 2y + 11 = 0$

3. Basta svolgere il sistema

$$\begin{cases} 2x + 3y + 1 = 0 \\ 3x - 2y + 11 = 0 \end{cases}$$

la cui unica soluzione è evidentemente $(x, y) = (-\frac{35}{13}, \frac{19}{13})$.

Esercizio 5. Calcolare il dominio delle seguenti funzioni

1. $f(x) = e^{2x-1}$

2. $f(x) = \frac{3x-1}{4-x^2}$

3. $f(x) = \sqrt{\frac{3-2x}{x^2-1}}$

4. $f(x) = ln(2 - x) - ln(1 - x)$

5. $f(x) = \frac{ln(\frac{3x-x^2}{x+1})}{ln(\frac{2-3x}{1-x^2})}$

Soluzione

1. Poichè la funzione e^x è sempre definita, allora il dominio dell'esponenziale coincide con il dominio dell'esponente, che in questo caso è una retta e quindi è sempre definita. Di conseguenza $D_f = (-\infty, \infty)$.

2. L'unico problema è dato da una eventuale divisione per 0 che ricordiamo non è possibile (non esistono numeri che moltiplicati per 0 danno risultato diverso da 0!!). Quindi bisogna porre $4 - x^2 \neq 0$, cioè $n \neq \pm 2$. Il dominio è quindi

$$D_f = (-\infty, -2) \cup (-2, 2) \cup (2, \infty)$$

3. L'unico problema è dato dalla radice, che non è definita per numeri negativi. Bisogna quindi porre

$$\frac{3 - 2x}{x^2 - 1} \geq 0$$

Si trova allora che

$$D_f = (-\infty, -1) \cup (1, \frac{3}{2}]$$

4. Ricordiamo che il logaritmo non è definito per numeri non positivi. Poichè abbiamo due logaritmi, otteniamo allora la seguente doppia condizione

$$\begin{cases} 2-x>0 \\ 1-x>0 \end{cases}$$

Quindi $D_f = (-\infty, 1)$.

5. In questo caso non abbiamo soltanto due logaritmi, ma anche una frazione. Le condizioni sono pertanto tre. (Ricordiamo che $ln(f(x)) = 0$ se e solo se $f(x) = 1$!).

$$\begin{cases} \frac{3x-x^2}{x+1} > 0 \\ \frac{2-3x}{1-x^2} > 0 \\ \frac{2-3x}{1-x^2} \neq 1 \end{cases}$$

La prima disequazione ha soluzioni: $x < -1 \vee 0 < x < 3$; la seconda: $-1 < x < \frac{2}{3} \vee x > 1$; la terza $x \neq \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$. Quindi

$$D_f = (0, \frac{3-\sqrt{5}}{2}) \cup (\frac{3-\sqrt{5}}{2}, \frac{2}{3}) \cup (1, \frac{3+\sqrt{5}}{2}) \cup (\frac{3+\sqrt{5}}{2}, 3)$$