0.1 Esercitazioni V, del 18/11/2008

Esercizio 0.1.1. Risolvere usando Cramer il seguente sistema lineare

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ kx+y-z=0 \\ x-kz=1 \end{cases}$$

Soluzione: Il determinante della matrice dei coefficienti è $(k-2)(k+1)$, che è diverso da zero per $k \neq -1, 2$. Per tali valori di k, il teorema di Cramer garantisce esistenza e unicità della soluzione, che risulta essere

$$(x,y,z) = (-\frac{k+2}{(k-2)(k+1)}, \frac{k}{k-2}, -\frac{k}{(k-2)(k+1)})$$

Restano da considerare i casi $k=-1$ e $k=2$.

1. $(k=-1)$
   Sostituendo $k=-1$ nel sistema, esso diventa
   $$\begin{cases} x+y+z=1 \\ -x+y-z=0 \\ x+z=1 \end{cases}$$
   Si vede allora subito che la prima e la terza equazione implicano $y=0$. Sostituendo tale valore di y nella seconda si trova allora $x+z=0$, in evidente contraddizione con la terza equazione. Quindi in questo caso il sistema è incompatibile.

2. $(k=2)$
   Sostituendo $k=2$ nel sistema, esso diventa
   $$\begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x+y-z=0 \\ x-2z=1 \end{cases}$$
   Esplicitando x nella terza equazione si ha $x=1+2z$. Sostituendo tale valore di x nella prima e nella seconda equazione si trova $3z+y=0$ e $3z+y=-2$, ancora una volta in evidente contraddizione. Dunque anche in questo caso il sistema è incompatibile.

Esercizio 0.1.2. Si considerino i seguenti vettori di $\mathbb{R}^3$: $v_1 = (1,2,0), v_2 = (0,1,2), v_3 = (1,1,1)$.

1. Mostrare che formano una base di $\mathbb{R}^3$.

2. Trovare le coordinate di $v = (3,4,7)$ nella nuova base $\{v_1, v_2, v_3\}$.

Soluzione:

1. Ricordiamo che tre vettori in $\mathbb{R}^3$ formano una base se e soltanto se sono linearmente indipendenti, ovvero se e soltanto se la matrice delle loro componenti ha determinante diverso da zero. Effettivamente

$$det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 3 \neq 0$$

Quindi $\{v_1, v_2, v_3\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$.

2. Dobbiamo trovare tre numeri reali a, b, c tali che

$$v = av_1 + bv_2 + cv_3$$

ovvero tali che

$$a(1,2,0) + b(0,1,2) + c(1,1,1) = (3,4,7)$$

e quindi tali che

$$(a + c, 2a + b + c, 2b + c) = (3,4,7)$$

Dobbiamo dunque risolvere il sistema lineare

$$\begin{cases} a + c = 3 \\ 2a + b + c = 4 \\ 2b + c = 7 \end{cases}$$

Si trovano le soluzioni $(a,b,c) = (-\frac{2}{3}, \frac{5}{3}, \frac{11}{3})$. Queste sono le coordinate di v rispetto alla base $\{v_1, v_2, v_3\}$.

Esercizio 0.1.3. Determinare una base per lo spazio delle soluzioni del sistema omogeneo

$$\begin{cases} x+y+t+z=0 \\ x-y+t-z=0 \\ x+t=0 \\ y+z=0 \end{cases}$$

Soluzione: Dobbiamo prima di tutto risolvere il sistema lineare omogeneo in questione. A tal fine osserviamo che la prima equazione è la somma della terza e della quarta. Dunque possiamo eliminarla. Alla stessa maniera possiamo eliminare la seconda equazione, essendo la differenza fra la terza e la quarta. Il sistema si riduce allora a

$$\begin{cases} x+t=0 \\ y+z=0 \end{cases}$$

Poniamo allora $t=h$ e $z=k$. Le soluzioni del sistema sono allora

$$S=\{(-h,-k,h,k),h,k\in\mathbb{R}\}$$

Si tratta quindi di uno spazio vettoriale di dimensione due (essendoci due parametri). A questo punto per trovare una base di tale spazio è sufficiente porre una volta $h=1,k=0$ e l'altra $h=0,k=1$. Per cui una base per S è $\{(-1,0,1,0),(0,-1,0,1)\}$.

Esercizio 0.1.4. Calcolare i seguenti limiti di successioni

1. $lim_{n\to\infty}n^2$
2. $lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n+1}$
3. $lim_{n\to\infty}\frac{n^2-1}{n^3}$
4. $lim_{n\to\infty}\frac{cos(n)}{n}$ (per chi non sapesse cosa è il coseno, per questo esercizio basta sapere che $-1\leq cos(n)\leq 1$ per ogni n).
5. sia M un numero reale e $\{a_n\}$ una successione tale che $0\leq a_n\leq M$ per ogni n. Calcolare $lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}$

Soluzione: Spero che per i primi tre nessuno abbia problemi.

1. ∞

2. ∞, in quanto il polinomio a numeratore ha grado maggiore di quello a denominatore. Volendo fare i conti si ha

$$lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n+1} = lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n(1+\frac{1}{n})} = lim_{n\to\infty}\frac{n}{1+\frac{1}{n}}$$

   Ora $1/n$ tende a 0 e quindi il precedente limite si riduce al limite di n che è evidentemente infinito.

3. 0, in quanto il polinomio a numeratore ha grado minore di quello a denominatore. Volendo fare i conti si ha

$$lim_{n\to\infty}\frac{n^2-1}{n^3} = lim_{n\to\infty}\frac{n^2(1-\frac{1}{n^2})}{n^3} = lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{1}{n^2}}{n}$$

   Ora $1/n^2 \to 0$, quindi il precedente limite si riduce a quello di $1/n$ che è evidentemente 0.

4. Dal teorema del confronto abbiamo

$$lim_{n\to\infty}\frac{-1}{n} \leq lim_{n\to\infty}\frac{cos(n)}{n} \leq lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}$$

   Ora, il primo e il terzo limite sono entrambi nulli, quindi, dal teorema dei carabinieri, è nullo anche il limite centrale.

5. Dal teorema del confronto si ha

$$0 \leq lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n} \leq M lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}$$

   Ora, l'ultimo limite è nullo, quindi, dal teorema dei carabinieri, è nullo anche il limite centrale.

Esercizio 0.1.5. Verificare i seguenti limiti di successioni

1. $lim_{n\to\infty}n^3 = \infty$
2. $lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2} = 0$
3. $lim_{n\to\infty}\frac{n}{n-1} = 1$
4. $lim_{n\to\infty}\frac{2n}{n-2} = 2$

Soluzione:

1. Dobbiamo mostrare che per ogni $M > 0$ esiste n_M tale che $n^3 > M$ per ogni $n > n_M$. La condizione $n^3 > M$ equivale a $n > \sqrt[3]{M}$ Poniamo allora $n_M = \sqrt[3]{M}$. Resta allora solo da osservare che con questa scelta di n_M la condizione $n^3 > M$ per ogni $n > n_M$ è certamente verificata.

2. Dobbiamo mostrare che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste n_ε tale che $|\frac{1}{n^2}| < \varepsilon$ per ogni $n > n_\varepsilon$. La condizione $|\frac{1}{n^2}| < \varepsilon$ equivale a $|\frac{1}{\varepsilon}| < n^2$, cioè alla condizione $\sqrt{|\frac{1}{\varepsilon}|} < n$. Poniamo allora $n_\varepsilon = \sqrt{|\frac{1}{\varepsilon}|}$. Con questa scelta di n_ε la condizione $|\frac{1}{n^2}| < \varepsilon$ per $n > n_\varepsilon$ è certamente soddisfatta.

3. Dobbiamo mostrare che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste n_ε tale che $|\frac{n}{n-1} - 1| < \varepsilon$ per ogni $n > n_\varepsilon$. La condizione $|\frac{n}{n-1} - 1| < \varepsilon$ equivale a $|\frac{n-n+1}{n-1}| < \varepsilon$ che equivale a sua volta alla condizione $1 + |\frac{1}{\varepsilon}| < n$. Poniamo allora $n_\varepsilon = 1 + 1/\varepsilon$.

4. La condizione $|\frac{2n}{n-2} - 2| < \varepsilon$ equivale alla condizione $2 + 4|\frac{1}{\varepsilon}| < n$. Basta allora scegliere $n_\varepsilon = 2 + 4|\frac{1}{\varepsilon}|$.

Esercizio 0.1.6. Siano $\{a_n\}$ $\{a'_n\}$ due successioni con limiti rispettivamente l ed l'. Supponiamo che

1. $l < 0$

2. $a_n a'_n < 0$ per ogni n

Mostrare che $l' \geq 0$.

Soluzione: Siccome $l < 0$, dal teorema di permanenza del segno si ha $a_n < 0$ per ogni n maggiore di un certo n_1. Quindi, la condizione $a_n a'_n < 0$ implica che $a'_n > 0$ per ogni $n > n_1$. Applicando nuovamente il teorema di permanenza del segno segue allora che $l' \geq 0$.

Nota: non si può concludere che $l > 0$ in quanto "le disuguaglianze si attenuano al limite". Ad esempio $1/n > 0$ per ogni n, eppure $1/n \to 0$.

Esercizio 0.1.7. Siano n_0 un numero naturale fissato e $\{a_n\}$ una successione. Perchè non si definisce il $lim_{n \to n_0} a_n$?

Soluzione: Per rispondere a questa domanda bisogna capire a fondo il concetto di limite. Sostanzialmente, se f è una funzione di dominio D possiamo pensare di calcolare il limite di f per x che tende ad un punto x_0, cercando di andare a vedere cosa fa la funzione vicino a x_0 e cercando allora di scoprirne un comportamento regolare. Però, per andare a vedere come si comporta f vicino a x_0 è necessario poter calcolare f vicino a x_0 è quindi necessario che x_0 sia un punto di accumulazione per D. Andiamo adesso al nostro caso in cui la funzione f è una successione, ovvero una funzione di dominio $\mathbb{N}$. Ma $\mathbb{N}$ non ha punti di accumulazione, in quanto ogni numero naturale è separato da ciascun altro e quindi non abbiamo speranza di definire un concetto di limite per $n \to n_0$. È interessante osservare che anche il concetto di limite per $n \to \infty$ è legato ai punti di accumulazione. Diamo infatti la seguente (ovvia!)

Definizione 0.1.8. Gli intorni dell'infinito sono gli insiemi della forma (a, ∞).

Da questa definizione segue che ∞ è un punto di accumulazione per $\mathbb{N}$. Quindi il motivo finale per cui si definisce soltanto il $lim_{n \to \infty}$ è che ∞ è l'unico punto di accumulazione per $\mathbb{N}$.