0.1 Soluzioni esercitazione VII, del 2/12/2008

Esercizio 0.1.1. Risolvere, al variare del parametro reale k, il seguente sistema lineare

$$\begin{cases} kx + ky - z = 1 \\ x + 2z = -1 \\ 2x - ky + z = 2 \end{cases}$$

Soluzione: Il determinante della matrice dei coefficienti è uguale a $2k(k+2)$. Quindi è diverso da zero se e soltanto se $k \neq 0$ e $k \neq -2$. Per tali valori di k il teorema di Cramer garantisce esistenza e unicità della soluzione che risulta essere, sempre grazie al teorema di Cramer:

$$(x, y, z) = (\frac{3}{k+2}, -\frac{5k+1}{2k(k+2)}, -\frac{k+5}{2(k+2)})$$

Per $k = 0$ e $k = -2$ si arriva subito a riconoscere due sistemi incompatibili.

Esercizio 0.1.2. Si considerino i seguenti vettori di $\mathbb{R}^3$: $v_1 = (1,0,2), v_2 = (1,1,1), v_3 = (1,-1,-3)$.

1. Mostrare che formano una base di $\mathbb{R}^3$
2. Trovare le coordinate di $v = (3,-3,-2)$ nella nuova base $\{v_1, v_2, v_3\}$

Soluzione:

1. Ricordando che n vettori in $\mathbb{R}^n$ formano una base se e soltanto se sono linearmente indipendenti, basta mostrare che v_1, v_2, v_3 sono l.i. Ciò equivale a mostrare che la matrice dei loro coefficienti ha determinante diverso da zero. In effetti:

$$det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix} = -6 \neq 0$$

2. Il problema consiste nel determinare tre numeri reali a, b, c tali che

$$a(1,0,2) + b(1,1,1) + c(1,-1,-3) = (3,-3,-2)$$

Sfruttando la linearità delle operazioni fra vettori e la proprietà che due vettori sono uguali se e solo se hanno le componenti ordinatamente uguali si arriva come al solito al sistema lineare

$$\begin{cases} a+b+c=3 \\ b-c=-3 \\ 2a+b-3c=-2 \end{cases}$$

le cui soluzioni, che sono appunto le coordinate di v rispetto alla nuova base $\{v_1, v_2, v_3\}$, sono $(a,b,c) = (\frac{7}{3}, -\frac{7}{6}, \frac{11}{6})$.

Esercizio 0.1.3. Sia S lo spazio delle soluzioni del sistema omogeneo

$$\begin{cases} x_1+2x_2-x_3-x_4=0 \\ x_1-x_3=0 \\ x_1-2x_2-x_3+x_4=0 \\ 2x_2-x_4=0 \end{cases}$$

1. Determinare una base per S.
2. Dire quale fra i seguenti vettori è ortogonale ad S: $v=(0,1,0,1)$, $w=(1,-2,-1,1)$.

Soluzione:

1. Osservando che la prima equazione è somma della seconda e della quarta e che la terza equazione è loro differenza, possiamo toglierle e ridurci al sistema costituito soltanto dalla seconda e quarta equazione. Ponendo allora $x_3=h$ e $x_4=k$ arriviamo alle soluzioni
$$S = \{(h, \frac{k}{2}, h, k), h, k \in \mathbb{R}\}$$
Una base di S si ottiene ponendo prima $h=1, k=0$ e poi $h=0, k=1$. Essa è dunque costituita dai due vettori
$$v_1 = (1,0,1,0) \qquad v_2 = (0, \frac{1}{2}, 0, 1)$$
2. Ricordiamo che un vettore è ortogonale ad S se e soltanto se è ortogonale ad ogni vettore di una base di S. Dunque consideriamo prima il vettore v e andiamo a vedere se è ortogonale alla base $\{v_1, v_2\}$. Si ha
$$(v, v_1) = 0 \qquad (v, v_2) = \frac{1}{2} + 1 \neq 0$$

Quindi v non è ortogonale a v_2 e di conseguenza $v \notin S^{\perp}$.

Facciamo adesso la stessa cosa per w. Si ha

$$(w, v_1) = 1 - 1 = 0 \qquad (w, v_2) = -1 + 1 = 0$$

Quindi w è ortogonale sia a v_1 che a v_2 e di conseguenza $w \in S^{\perp}$.

Esercizio 0.1.4. Determinare il carattere delle seguenti serie

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n}{n^3}$
2. $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{n-1}{n})^{n^2}$
3. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(logn)^n}$

Soluzione:

1. La serie in questione è somma delle due serie convergenti $\sum \frac{1}{n^3}$ e $\sum \frac{1}{n^2}$, quindi converge.
2. Applichiamo il criterio del rapporto. Si ha

   $$\sqrt[n]{(\frac{n-1}{n})^{n^2}} = (\frac{n-1}{n})^n = (1 + \frac{-1}{n})^n$$

   ricordando adesso il limite notevole $(1+\frac{x}{n})^n \to e^x$ segue che la precedente successione converge a $e^{-1} < 1$. Dunque la serie converge.
3. Applichiamo nuovamente il criterio del rapporto. Si ha

   $$\sqrt[n]{\frac{1}{(logn)^n}} = \frac{1}{logn} \to 0 < 1$$

   Quindi la serie converge.

Esercizio 0.1.5. Studiare, al variare di $x > 0$, il carattere delle seguenti serie

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^n}{2n+1}$
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2 3^{n-1} x^n}$

Soluzione:

1. Applichiamo il criterio del rapporto. Si ha
$$\frac{(n+1)x^{n+1}}{2n+3} \cdot \frac{2n+1}{nx^n} = \frac{(n+1)(2n+1)x}{n(2n+3)} \to x$$
Dunque vi è convergenza per $x < 1$ e divergenza per $x > 1$. Per $x = 1$ il criterio del rapporto non dà risposta e quindi per studiare il carattere della serie tentiamo la sostituzione diretta. La serie, per $x = 1$, diventa la serie di termine generico $\frac{n}{2n+1}$. Poichè esso non è infinitesimo, allora la serie diverge. Riassumendo, abbiamo convergenza per $0 \leq x < 1$ e divergenza per $x \geq 1$.

2. Riscriviamo innanzitutto la serie nella forma
$$6 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 3^n x^n}$$
Applichiamo adesso il criterio del rapporto. Abbiamo
$$\sqrt[n]{\frac{1}{n^2 3^n x^n}} = \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} \cdot \frac{1}{3x} \to \frac{1}{3x}$$
Dunque vi è convergenza se $\frac{1}{3x} < 1$, cioè se $x > \frac{1}{3}$; vi è divergenza se $\frac{1}{3x} > 1$, cioè se $0 < x < \frac{1}{3}$. Infine il caso $x = \frac{1}{3}$ va fatto a parte in quanto il criterio della radice non dà risposta. Per $x = \frac{1}{3}$ la serie diventa
$$6 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^2 3^n} = 6 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$
che converge. Riassumendo, abbiamo convergenza per $x \geq \frac{1}{3}$ e divergenza per $0 < x < \frac{1}{3}$.

Esercizio 0.1.6. Dare un esempio esplicito (cioè attraverso una formula) di

1. funzione continua
2. funzione non continua
3. funzione derivabile
4. funzione continua ma non derivabile
5. funzione crescente

6. funzione con derivata maggiore di 0 ma non crescente

Soluzione: La funzione $f(x) = x$ è continua, derivabile e crescente. La funzione $f(x) = |x|$ è il classico esempio di funzione continua, ma non derivabile, in quanto la sua tangente nel punto $x = 0$ non è unicamente definita. Una funzione non continua è ad esempio la funzione di Heavyside

$$f(x) = \begin{cases} 0 & se \quad x < 0 \\ 1 & se \quad x \geq 0 \end{cases}$$

che non è continua perchè nel punto $x = 0$ ha un salto (discontinuità non eliminabile). Infine, una funzione con derivata maggiore di zero, ma non crescente è ad esempio $f(x) = -\frac{1}{x}$. La sua derivata è $\frac{1}{x^2} > 0$ per ogni x. Tuttavia non è crescente perchè ad esempio $f(-1) > f(2)$, nonstante sia $-1 < 2$.

Osservazione 0.1.7. Problemi di questo tipo nascono quando ci sono asintoti o, più in generale punti di non definizione, in mezzo. Vale infatti il seguente

Teorema 0.1.8. *Se f è definita in un intervallo ed è ivi continua, derivabile e con derivata > 0, allora f è ivi anche crescente.*

Questo teorema non si applica a $f(x) = -\frac{1}{x}$, in quanto essa è definita in $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ che non è un intervallo.