MATEMATICA GENERALE - Canale III

Prof. A. Ramponi - A.A. 2011/2012

Riepilogo argomenti trattati

Settimana 1 (3/5 - Ottobre)

Introduzione al corso. Elementi base di teoria degli insiemi: definizioni ed operazioni (unione, intersezione, differenza, complemento). Insiemi numerici: i naturali $\mathbb{N}$, gli interi $\mathbb{Z}$, i razionali $\mathbb{Q}$. Irrazionalità di $\sqrt{2}$. I numeri reali $\mathbb{R}$. Rappresentazione geometrica dei numei reali. Intervalli propri e impropri. Insiemi limitati superiormente e inferiormente. Massimo e minimo, maggioranti e minoranti, estremo inferiore e superiore.

Rif. Simon-Blume, *Matematica Generale*: Appendice A1.1, A1.2 (facoltativa A1.3), Cap. 2.1.

Settimana 2 (10/12 - Ottobre)

Funzioni. Principali definizioni: funzioni iniettive, suriettive e biunivoche. Funzioni di variabile reale. Dominio e immagine. Il piano cartesiano. Grafico di funzioni. Funzioni monotone.

Richiami di trigonometria. Distanza di punti nel piano. Rette e funzioni lineari. Il coefficiente angolare. Esempi di funzioni lineari. Equazione della retta passante per due punti. La funzione modulo. Funzioni quadratiche.

Rif. Simon-Blume, *Matematica Generale*: Cap. 2.1, 2.2.

Settimana 3 (17/19 - Ottobre)

Successioni. Limiti di successioni: convergenza e divergenza. Unicità del limite. Successioni monotone. Operazioni algebriche sui limiti: somma, prodotto, quoziente. Forme indeterminate: $+\infty-\infty$, $\pm\infty\cdot 0$, $\frac{0}{0}$, $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$, $1^{\pm\infty}$, 0^0, $\pm\infty^0$. Teoremi di confronto. Teorema di permanenza del segno. Il numero di Nepero $e = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. Applicazione: composizione continua degli interessi. Le funzioni esponenziali $f(x) = a^x$: definizione e prime proprietà.

Argomenti dell'esercitazione: perpendicolarità tra rette, dominio e segno di alcune funzioni, regola di Ruffini, limiti di successioni.

Rif. Simon-Blume, *Matematica Generale*: Cap. 2.3, 2.4, 5.1, 5.2, 5.4.

Settimana 4 (24/26 - Ottobre)

Funzioni inverse: il logaritmo. Dal limite di successione al limite di funzione: $x \to \pm\infty$, $x \to x_0$. Limiti da destra e da sinistra. Asintoti orizzontali e verticali.

Funzioni continue: definizione, proprietà ed esempi. Teoremi: di permanenza del segno, di Weierstrass, dei valori intermedi, di esistenza degli zeri.

La derivata di una funzione: definizione ed interpretazione geometrica.

Argomenti dell'esercitazione: calcolo di limiti di funzione di variabile reale e determinazione di asintoti orizzontali e verticali.

Rif. Simon-Blume, *Matematica Generale*: Cap. 2.3, 2.4, 2.5, 4.1, 4.2 (derivazione esclusa), 5.3, 5.4.

Settimana 5 (31 Ottobre, 2 Novembre)

Le derivate delle funzioni elementari. Regole di calcolo. Crescenza e decrescenza. Caratterizzazione di minimi e massimi locali e punti stazionari. Un esempio di studio di funzione.

Argomenti dell'esercitazione: calcolo di derivate e studi di funzione.

Rif. Simon-Blume, *Matematica Generale*: Cap. 2.6, 3.1, 3.4, 3.5, 5.5.

Settimana 6 (7/9 Novembre)

I teoremi di Rolle e di Lagrange (o del Valore Medio). Derivate di ordine superiore. Concavità e convessità: definizione e relazione con la derivata seconda. Massimi e minimi: condizioni del secondo ordine.

Infiniti, infinitesimi e loro confronto. Ulteriori applicazioni del calcolo differenziale: il teorema di de l'Hôpital e la soluzione di forme indeterminate; sviluppi e polinomi di Taylor.

Argomenti dell'esercitazione: limiti di forme indeterminate risolti con de l'Hôpital. Studio delle funzioni: $f(x) = x(\log(x))^2$, $f(x) = xe^{-2x}$, $f(x) = -2xe^{1/(3x)}$.

Rif. Simon-Blume, *Matematica Generale*: Cap. 2.7, 2.8, 3.2, 3.3, 3.5, (facoltativo: 3.6), 7.

Settimana 7 (14/16 Novembre)

Integrazione indefinita e funzioni primitive. Regole di integrazione: integrali immediati, integrazione per parti, intergazione per sostituzione. Integrale definito: definizione e principali proprietà. Teorema della media integrale. Teorema fondamentale del calcolo integrale. Integrali impropri.

Argomenti dell'esercitazione: polinomi di Taylor, integrazione per sostituzione e parti.

Rif. Simon-Blume, *Matematica Generale*: Cap. 8.1, 8.2, 8.3, 8.4.

Settimana 8 (21/23 Novembre)

Serie numeriche. La serie geometrica: definizione e proprietà. Un esempio di applicazione: il valore attuale di un flusso di cassa.

Sistemi lineari. Rappresentazione tramite matrici. Metodi di soluzione: sostituzione e eliminazione di Gauss.

Il determinante di una matrice: definizione e calcolo.

Argomenti dell'esercitazione: integrazione per sostituzione e parti, soluzione di sistemi lineari, calcolo di determinanti.

Rif. Simon-Blume, *Matematica Generale*: Cap. 8.5, 10.1, 10.2, 12.1.

Settimana 9 (28/30 Novembre)

Determinante di matrici 3×3: regola di Sarrus. Minori e rango di una matrice $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Il Teorema di Rouché-Capelli: "Il sistema $A\underline{x} = \underline{b}$, dove $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ e $\underline{b} \in \mathbb{R}^m$, ammette soluzioni se e solo se rango(A) =rango$(\overline{A})$ ($\overline{A} = (A|b) \in R^{m\times(n+1)}$ matrice completa del sistema). In tal caso le soluzioni sono ∞^{n-p}, con p =rango(A) =rango$(\overline{A})$".

Il Teorema di Cramer e la rappresentazione della soluzione come rapporto di determinanti. Discussione della struttura delle soluzioni per sistemi parametrici e sistemi omogenei.

Prodotto di matrici, matrice identità $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$, matrice inversa. Soluzione del sistema lineare $A\underline{x} = \underline{b}$ come $\underline{x} = A^{-1}\underline{b}$, per $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e invertibile.

Introduzione ai vettori.

Argomenti dell'esercitazione: soluzione di sistemi lineari.

Rif. Simon-Blume, *Matematica Generale*: Cap. 10, 11, 12 (solo gli argomenti trattati a lezione), 13.1, 13.2.

Settimana 10 (5/7 Dicembre)

Vettori in $\mathbb{R}^n$. Algebra vettoriale: addizione, sottrazione, moltiplicazione per uno scalare e loro interpretazione geometrica. Prodotto scalare (o interno), norma, disuguaglianza triangolare.

Combinazioni lineari di vettori: $c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_k\mathbf{v}_k$, $c_i \in \mathbb{R}, \mathbf{v}_i \in \mathbb{R}^n$, $i = 1, \ldots, k$, insiemi generati, dipendenza e indipendenza lineare. Esempi in $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$: rette e piani. Determinazione della proprietà di dipendenza o indipendenza lineare dei vettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_k \in \mathbb{R}^n$ come studio delle autosoluzioni del sistema omogeneo $A\mathbf{c} = \mathbf{0}$:

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_k\mathbf{v}_k = \mathbf{0}$$

$$\Updownarrow$$

$$c_1 \begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{21} \\ \vdots \\ v_{n1} \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} v_{12} \\ v_{22} \\ \vdots \\ v_{n2} \end{pmatrix} + \cdots + c_k \begin{pmatrix} v_{1k} \\ v_{2k} \\ \vdots \\ v_{nk} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} & \cdots & v_{1k} \\ v_{21} & v_{22} & \cdots & v_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ v_{n1} & v_{n2} & \cdots & v_{nk} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Basi di $\mathbb{R}^n$.

Argomenti dell'esercitazione: soluzione di sistemi lineari parametrici e omogenei. Dipendenza e indipendenza di vettori.

Rif. Simon-Blume, *Matematica Generale*: Cap. 13.1, 13.2, 13.3, 13.4, 14.

Settimana 11 (12/14 Dicembre)

Insiemi generati da vettori, base e dimensione di $\mathbb{R}^n$.

Funzioni reali di più variabili. Domini, limiti e continuità: il caso $n = 2$. Rappresentazione grafica: superfici e curve di livello. Derivate parziali: definizione e calcolo, gradiente ed Hessiano. Piano tangente e punti stazionari. Massimi, minimi e punti di sella: condizioni del primo e del secondo ordine.

Teorema. *Sia* $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, *D insieme aperto, una funzione dotata di derivate prime e seconde, sia* (x_0, y_0) *un punto stazionario in* D, $f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0$ *e*

$$H(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} f_{xx}(x_0, y_0) & f_{xy}(x_0, y_0) \\ f_{xy}(x_0, y_0) & f_{yy}(x_0, y_0) \end{pmatrix}$$

la matrice Hessiana nel punto. Allora

$$det(H(x_0, y_0)) > 0 \Rightarrow \begin{cases} (x_0, y_0) & \text{è un minimo} \quad \text{se } f_{xx}(x_0, y_0) > 0 \\ (x_0, y_0) & \text{è un massimo} \quad \text{se } f_{xx}(x_0, y_0) < 0, \end{cases}$$

$$det(H(x_0, y_0)) < 0 \Rightarrow \quad (x_0, y_0) \quad \text{è un punto di sella.}$$

Nel caso $det(H(x_0, y_0)) = 0$, *nulla si può concludere.* □

Cenni ai problemi di ottimizzazione liberi e vincolati.

Rif. Simon-Blume, *Matematica Generale*: Cap. 14.2, 14.3. Gli argomenti trattati in queste lezioni sulle funzioni di n variabili sono (molto più) diffusamente trattati nei seguenti capitoli del Simon-Blume: 17.1, 17.2, 17.5, 17.6, 17.7, 17.10, 18.1, 18.2, 18.3, (chi è interessato può leggere anche 17.8, 17.9, 18.4).