Individuare la risposta corretta nelle seguenti domande a risposta multipla. Ogni risposta esatta vale 2 punti, ogni risposta sbagliata -1 punto, risposta non data 0 punti. L'ultima domanda vale 2 punti

4) *(2 p.ti)* Dato un sistema omogeneo di 3 equazioni lineari in 3 incognite , puo' avere ∞^2 soluzioni.

☒ Vero ☐ Falso

5) *(2 p.ti)* Data $F(x)$ cosí definita $F(x) = \int_2^x e^{t^2}\,dt$ $x \in (2,4)$, calcolare $F'(2)$

1. $F'(2) = 0$
2. ☒ $F'(2) = e^4$
3. $F'(2) = e^{\sqrt{2}}$

6) *(2 p.ti)* Determinare l'estremo superiore, inferiore, il massimo, il minimo, i punti di accumulazione, i punti di frontiera e i punti interni dell'insieme

$$A = \left\{\frac{1}{n}\right\}_{n\geq 1} \cup \left\{\frac{n+1}{n}\right\}_{n\geq 1}$$

1. $supA = 2$, $infA = 0$, $maxA = 2$, $\nexists\, minA$, $Acc(A) = \{0, 2\}$, $Fr(A) = A \cup \{0, 1\}$, $Int(A) = \emptyset$.
2. ☒ $supA = 2$, $infA = 0$, $maxA = 2$, $\nexists\, minA$, $Acc(A) = \{0, 1\}$, $Fr(A) = A \cup \{0, 1\}$, $Int(A) = \emptyset$.
3. $supA = 2$, $infA = 0$, $\nexists\, maxA$, $\nexists\, minA$, $Acc(A) = \{0\}$, $Fr(A) = A \cup \{\frac{1}{2}\}$, $Int(A) = \{\frac{1}{2}\}$.

7) *(2 p.ti)* Il polinomio di Taylor di ordine due della funzione $f(x) = x \sin x$ in $x_0 = 0$ è

1. $p(x) = \frac{x^2}{2} + x + 1$
2. $p(x) = -\frac{x^2}{2} + 1$
3. ☒ $p(x) = x^2$

8) *(2 p.ti)* Dare la definizione di base di uno spazio vettoriale e trovare una base per lo spazio $\mathbb{R}^3$

Base di uno spazio vettoriale è un insieme di vettori indipendenti che genera linearmente tutto lo spazio vettoriale.
Una possibile base per lo spazio $\mathbb{R}^3$ è la base canonica: $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$, $e_3 = (0,0,1)$.

MATEMATICA GENERALE - Canali III, IV

Sessione Invernale, III Appello , 13/2/2013, A.A. 2012/2013, Compito 3

Cognome .... Nome .... Matricola ....

Canale ☐ III (Prof. Manzini) ☐ IV (Prof.ssa Tessitore)

Firma ....

1) *(9 p.ti)* Studiare la funzione $f(x) = e^{\sqrt{2x}-x}$

a] Dominio e segno

L'esponenziale è ovunque definito, dunque il dominio della f è il dominio dell'esponente, cioè $[0, +\infty)$.
Inoltre l'esponenziale è sempre positivo, dunque $f > 0\ \forall x$ appartenente al dominio.

b] Limiti

Occorre considerare solo il limite a $+\infty$. Poiché, a $+\infty$, $\sqrt{2x}$ è un infinito di ordine inferiore rispetto ad x, $\lim \sqrt{2x} - x = -\infty$, quindi

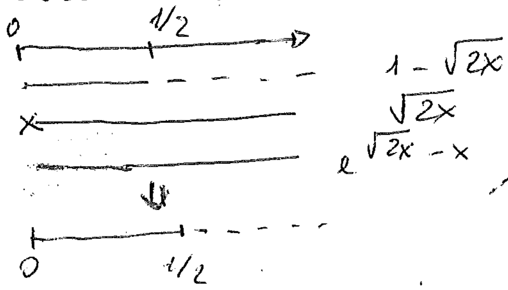
$\lim_{x\to+\infty} e^{\sqrt{2x}-x} = e^{\lim_{x\to+\infty}\sqrt{2x}-x} = e^{-\infty} = 0 \Rightarrow y = 0$ è asintoto a $+\infty$.

c] Determinazione punti critici (ovvero stazionari)

Poiché $f' = e^{\sqrt{2x}-x}\left(\frac{1}{\sqrt{2x}} - 1\right) = e^{\sqrt{2x}-x}\left(\frac{1-\sqrt{2x}}{\sqrt{2x}}\right)$
l'unico punto stazionario è $1 - \sqrt{2x} = 0$ cioè $\sqrt{2x} = 1$ $2x = 1$
$x = 1/2$

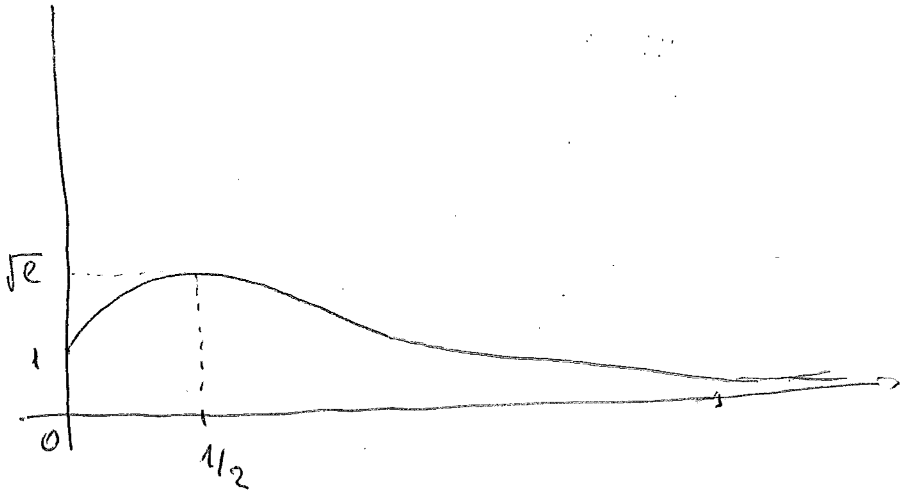
d] Studio massimi e minimi

Lo studio sarà effettuato studiando il segno della derivata prima:
$e^{\sqrt{2x}-x}\left(\frac{1-\sqrt{2x}}{\sqrt{2x}}\right) \geq 0 \iff 1 - \sqrt{2x} \geq 0$ $\sqrt{2x} \leq 1 \iff x \leq 1/2$
essendo ovviamente $x \geq 0$. Riassumendo:



f crescente in $[0, 1/2]$
f decrescente in $[1/2, +\infty)$
si osservi anche che la f è definita in $x = 0$, ma non derivabile. Dunque $x = 0$ è punto di minimo relativo per la f mentre $x = 1/2$ è punto di massimo relativo.
$f(0) = e^0 = 1$ è il minimo relativo.
$f(1/2) = e^{1/2} = \sqrt{e}$. è il massimo assoluto.

e] Grafico (lo studio di eventuali flessi è opzionale).



2) *(5 p.ti)* Calcolare

$$\int_1^2 \left(4\sqrt{x} - \frac{5\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right) dx$$

Effettuando la sostituzione $\sqrt{x} = t \to x = t^2 \to$ $dx = 2t\,dt$ si ha

$$\int_1^2 \left(4\sqrt{x} - \frac{5\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right) dx = \int_1^{\sqrt{2}} \left(4t - \frac{5\sin(t)}{t}\right) 2t\,dt =$$

$$\int_1^{\sqrt{2}} 8t^2\,dt - \int_1^{\sqrt{2}} 10\sin t\,dt = 8\left.\frac{t^3}{3}\right|_1^{\sqrt{2}} + 10\cos(t)\Big|_1^{\sqrt{2}} =$$

$$\frac{8}{3}\left((\sqrt{2})^3 - 1\right) + 10\left(\cos(\sqrt{2}) - \cos(1)\right).$$

3) *(7 p.ti)* Studiare al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$ le soluzioni del sistema e trovarle:

$$\begin{cases} 2x + ky + 4z &= 5 \\ x - y - kz &= 1 \end{cases}$$

Si considerano le matrici complete ed incomplete del sistema, cioè

$$M_I = \begin{pmatrix} 2 & k & 4 \\ 1 & -1 & -k \end{pmatrix} \qquad M_c = \begin{pmatrix} 2 & k & 4 & 5 \\ 1 & -1 & -k & 1 \end{pmatrix}$$

Per avere la compatibilità dovrà essere $rg(M_c) = rg(M_I)$.

Osserviamo subito il minore $\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 5 = -3 \neq 0$ della matrice completa; ciò implica che $rg(M_c) = 2 \quad \forall k$.

Per studiare il rango della incompleta si considera il minore 1×1 (2). Applicando il teor. di Kronecker, lo orliamo nei due modi possibili:

$$\begin{vmatrix} 2 & k \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 - k \qquad \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -k \end{vmatrix} = -2k - 4$$

che si annullano contemporaneamente solo per $k = -2$.

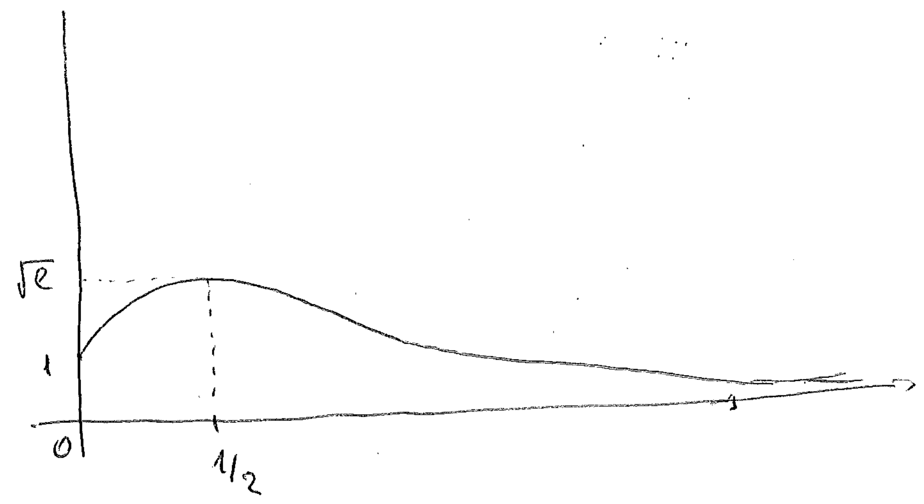
Dunque per $k = -2$ $rg(M_I) = 1$, mentre per $k \neq -2$ $rg(M_I) = rg(M_c) = 2$, cioè per $k = -2$ il sistema è incompatibile mentre per $k \neq -2$ il sistema è compatibile e le soluzioni sono (∞^1):

Considerando che $\begin{vmatrix} 2 & k \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$ per $k \neq -2$, si ha:

$$\begin{cases} 2x + ky = 5 - 4z \\ x - y = 1 + kz \end{cases}$$ le cui soluzioni sono

$$\begin{cases} x = \dfrac{\begin{vmatrix} 5-4z & k \\ 1+kz & -1 \end{vmatrix}}{-2-k} = \dfrac{5 + k + z(k^2 - 4)}{2 + k} \\[2ex] y = \dfrac{\begin{vmatrix} 2 & 5-4z \\ 1 & 1+kz \end{vmatrix}}{-2-k} = \dfrac{3 - z(4 + 2k)}{2 + k} \end{cases} \qquad \forall z \in \mathbb{R}$$

e] Grafico (lo studio di eventuali flessi è opzionale).



2) *(5 p.ti)* Calcolare

$$\int_1^2 \left(4\sqrt{x} - \frac{5\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)dx$$

Effettuando la sostituzione $\sqrt{x} = t \to x = t^2 \to$ $dx = 2t\,dt$ si ha

$$\int_1^2 \left(4\sqrt{x} - \frac{5\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)dx = \int_1^{\sqrt{2}} \left(4t - \frac{5\sin(t)}{t}\right) 2t\,dt =$$

$$\int_1^{\sqrt{2}} 8t^2\,dt - \int_1^{\sqrt{2}} 10\sin t\,dt = 8\frac{t^3}{3}\Big|_1^{\sqrt{2}} + 10\cos(t)\Big|_1^{\sqrt{2}} =$$

$$\frac{8}{3}\left((\sqrt{2})^3 - 1\right) + 10\left(\cos(\sqrt{2}) - \cos(1)\right).$$

3) *(7 p.ti)* Studiare al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$ le soluzioni del sistema è trovarle:

$$\begin{cases} 2x + ky + 4z = 5 \\ x - y - kz = 1 \end{cases}$$

Si considerino le matrici completa ed incompleta del sistema, cioè

$$M_I = \begin{pmatrix} 2 & k & 4 \\ 1 & -1 & -k \end{pmatrix} \qquad M_c = \begin{pmatrix} 2 & k & 4 & 5 \\ 1 & -1 & -k & 1 \end{pmatrix}$$

Per avere la compatibilità dovrà essere $rg(M_c) = rg(M_I)$.

Osserviamo subito il minore $\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 5 = -3 \neq 0$ della matrice completa; ciò implica che $rg(M_c) = 2$ $\forall k$.

Per studiare il rango della incompleta si consideri il minore 1x1 (2). Applicando il teor di Kronecker, lo orliamo nei due modi possibili:

$$\begin{vmatrix} 2 & k \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 - k \qquad \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -k \end{vmatrix} = -2k - 4$$

che si annullano contemporaneamente solo per $k = -2$.

Dunque per $k = -2$ $rg(M_I) = 1$, mentre per $k \neq -2$ $rg(M_I) = rg(M_c) = 2$, cioè per $k = -2$ il sistema è incompatibile mentre per $k \neq -2$ il sistema è compatibile e le soluzioni sono (∞^1):

Considerando che $\begin{vmatrix} 2 & k \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$ per $k \neq -2$, si ha:

$$\begin{cases} 2x + ky = 5 - 4z \\ x - y = 1 + kz \end{cases}$$ le cui soluzioni sono

$$\begin{cases} x = \dfrac{\begin{vmatrix} 5 - 4z & k \\ 1 + kz & -1 \end{vmatrix}}{-2 - k} = \dfrac{5 + k + z(k^2 - 4)}{2 + k} \\[2ex] y = \dfrac{\begin{vmatrix} 2 & 5 - 4z \\ 1 & 1 + kz \end{vmatrix}}{-2 - k} = \dfrac{3 - z(4 + 2k)}{2 + k} \end{cases} \qquad \forall z \in \mathbb{R}$$