Programma delle lezioni svolte nel corso CLEM di Matematica Generale, Lettere M-Z, Prof. F. Manzini.

1. Generalità sul corso e sulle modalità di esame. Insiemi ed operazioni sugli insiemi. Applicazioni tra insiemi e loro proprietá.

2. Applicazioni composte e inverse. Prodotto cartesiano di insiemi, insiemi numerici :$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$, relazione di ordine $\leq$, numerabilità.

3. Sistema di ascisse su una retta e topologia di $\mathbb{R}$, massimi,minimi, estremi superiori ed inferiori di s.i. di $\mathbb{R}$.

4. Funzioni reali di variabile reale, funzioni lineari affini, funzioni monotone, pari e dispari.

5. Rette nel piano cartesiano, equazioni espicite ed implicite, parallelismo e perpendicolarità di rette.

6. Polinomi e radici, numeri complessi e loro proprietà. Teorema fondamentale dell'algebra. Fattorizzazione di polinomi. Segno e grafico di polinomi quadratici.

7. Dominio e segno di funzioni irrazionali, fratte; esempi:

$$\frac{3x-1}{1-x}, \quad \frac{1}{2x-2}+\frac{3x}{x-2}, \quad \sqrt{2x-1}-x, \quad -\sqrt{3x+1}+x, \quad \frac{1}{\sqrt{x^2+x}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{x-1}}-\frac{1}{\sqrt{x}}, \quad \sqrt{\frac{x-3}{x^2-3x+2}}, \quad \frac{x^3-x^2+x-1}{x^2-3x+2}, \quad \frac{1}{\sqrt{2x+x^2}-x}$$

8. Funzioni logaritmiche ed esponenziali; esempi (dominio e segno) :

$$\log\left(x^2-3x+2\right), \quad \frac{1}{\log(x)+1}, \quad \frac{1}{\log_{\frac{1}{2}}(x)-2}, \quad \frac{\log(x)}{\log(x)-1}$$

9. Funzioni trigonometriche: $\sin(x), \cos(x), \tan(x)$. Esempi (dominio e segno) :

$$\sin(\log(x)), \quad \frac{\sin(x)}{\cos(x)-1}$$

10. Successioni: generalitá, monotonia, convergenza e divergenza, teorema del confronto, teorema dei carabinieri. Esempi vari.

11. Teorema permanenza del segno. Limiti di somme, prodotti, quozienti di successioni, limite di $a_n^{b_n}$, ordine di infinito per le successioni; alcuni limiti notevoli:

$$\lim_{n\to\infty} n \sin\left(\frac{1}{n}\right) = 1, \quad \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

12. Confronto fra infiniti ed infinitesimi. Serie numeriche: serie geometrica. Cenni alle serie armoniche generalizzate.

13. Funzioni: limiti, al finito o no, finiti o infiniti. Esempio di funzione che non ammette limite in un punto:

$$f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right) \quad \text{in} \quad x_0 = 0.$$

14. Teorema ponte, operazioni sui limiti, teorema della permanenza del segno, teorema dei carabinieri, punti di accumulazione destri e sinistri, limiti destri e sinistri di una funzione in un punto, asintoti verticali, contronto fra infinitesimi. Infinitesimi non confrontabili:

$$f(x) = x\sin\left(\frac{1}{x}\right) \quad \text{e} \quad g(x) = x \quad \text{in} \quad x_0 = 0.$$

15. Confronto tra infiniti, infinitesimi ed infiniti campione, ordine di infinito ed infinitesimo al finito ed all'infinito. Calcolo del limite

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x} = 1$$

ed altri limiti notevoli. Continuitá di una funzione, tipi di discontinuitá, teorema della permanenza del segno per funzioni continue.

16. Teorema di Weierstrass, Teor. dei valori intermedi, Teor. degli zeri , asintoti orizzontali ed obliqui, limiti notevoli:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x} = \frac{1}{2}, \quad \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e, \quad \lim_{x\to 0}\frac{\log(x+1)}{x} = 1, \quad \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1,$$

$$\lim_{x\to 0} x^{\sin(x)} = 1$$

17. Definizione di derivata ed interpretazione geometrica, equazione della retta tangente, funzioni non derivabil (p.ti angolosi, cuspidi e p.ti a tangente verticale), relazione tra continuitá e derivabilitá, tabella di derivate ed esempi vari, tra cui la derivata di $f(x)^{g(x)}$; definizione di punti di massimo e minimo locali e caratterizzazione delle derivate in essi.

18. Crescenza e decrescenza di una funzione derivabile e segno della derivata prima, determinazione di massimi e minimi locali e globali di una funzione derivabile. Esempi:

$$\frac{\log(x)}{x}, \quad xe^{\frac{1}{x}}, \quad \left(x^2-8\right)e^x$$

19. Convessitá di funzioni, interpretazione geometrica, punti di flesso. Esempi (gli stessi del n. 18)

20. Polinomio e formula di Taylor. Cenni allo sviluppo in serie di Taylor di una funzione. Esempi di polinomi di Taylor delle funzioni:

$$xe^x, \quad \sqrt{x}, \quad \sin(x), \quad \cos(x)$$

Calcolo di alcuni limiti con il polinomio di Taylor.
Cenni al confronto tra il grafico della funzione $\sin(x)$ ed i polinomi di Taylor di ordine 1 e 3 di essa centrati nel punto $x_0 = 0$. Vedi figura 1

21. Teoremi di Rolle e Lagrange con dimostrazione, regola dell'Hospital ed il calcolo di alcuni limiti.

22. Definizione di primitiva, integrale indefinito, regola di sostituzione immediata. Calcolo di alcuni integrali indefiniti. Studio della funzione:

$$x^4(x-1)^3$$

23. Definizione di integrale definito e funzioni integrabili, Teorema della media integrale per funzioni limitate ed integrabili, per funzioni continue; esempio di funzione non integrabile nell'intervallo $[0,1]$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in [0,1] \cap \mathbb{Q} \\ 0 & x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

Proprietá dell'integrale definito.

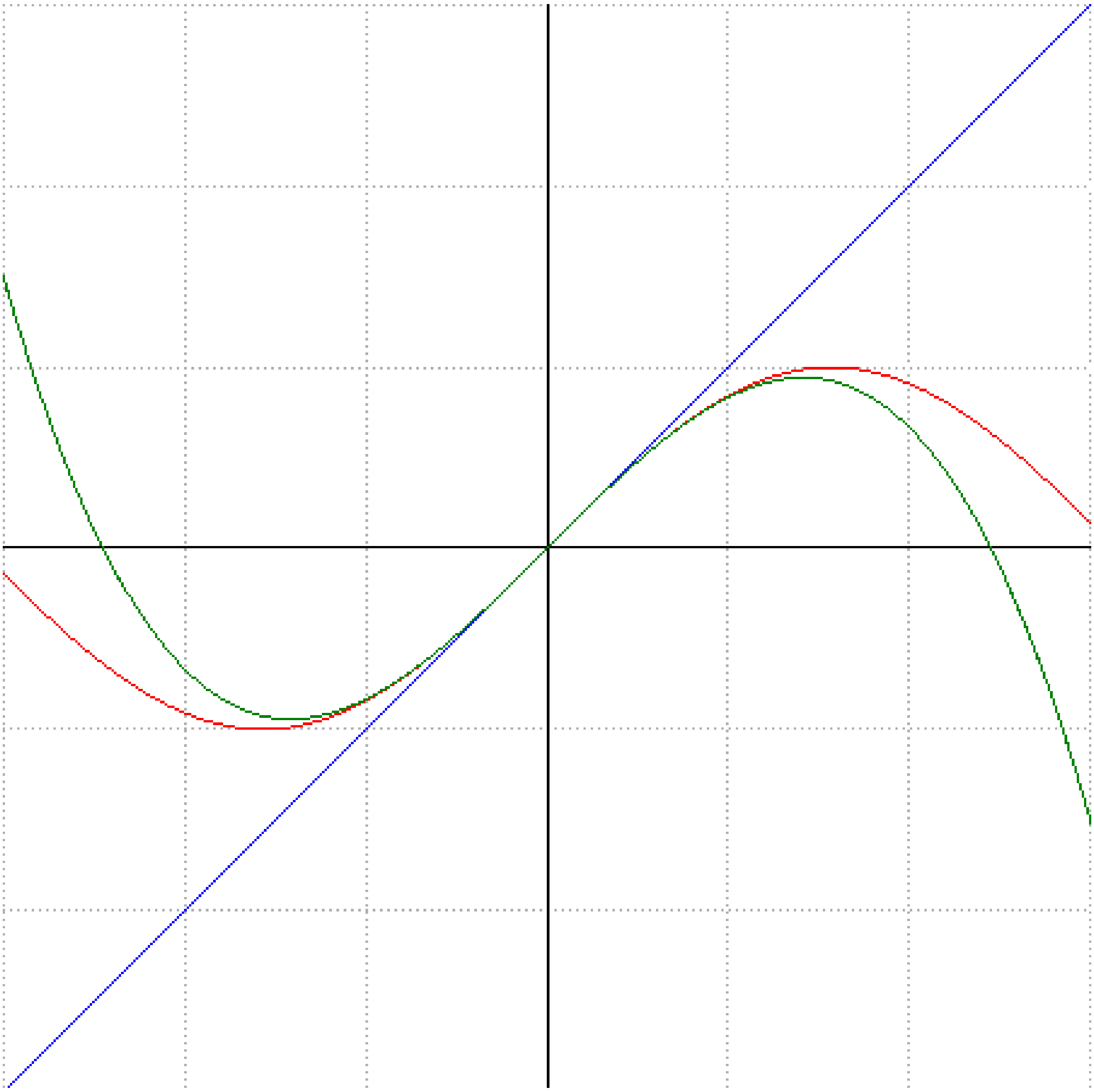

Figure 1: linea blu : $f(x) = x$; rossa : $f(x) = \sin(x)$; verde : $f(x) = x - \frac{x^3}{6}$

24. Calcolo dell'integrale definito, teorema di Torricelli-Barrow, metodi di integrazione per parti e sostituzione. Esempi. Cenni riguardo l'integrazione impropria.

25. Definizione e proprietá degli spazi vettoriali, $\mathbb{R}^n$ come spazio vettoriale (su $\mathbb{R}$), prodotto scalare, vettori ortogonali, combinazioni lineari tra vettori, norma di un vettore e distaza fra due punti, sottospazi di spazi vettoriali dati, dipendenza lineare e sua caratterizzazione. Indipendenza lineare. Esempi per ciascuno dei concetti espressi.

26. Rango di insiemi di vettori, basi di spazi vettoriali, coordinate, base canonica, dimensione di spazio vettoriale. Sistemi lineari, matrici e loro proprietá, matrici diagonali, triangolari superiori ed inferiori, matrice unitaria; scrittura di un sistema lineare nella forma:

$$A\underline{x} = \underline{b}$$

Determinante di una matrice quadrata, sviluppo di Laplace.

27. Proprietá dei determinanti, definizione e calcolo matrice inversa, rango di una matrice, teor. di Kronecker. Spazi vettoriali generati da un insieme finito di vettori.

28. Dimensione degli spazi vettoriali generati da un insieme finito di vettori; relazioni fra dipendenza lineare, determinante, rango di n vettori di $\mathbb{R}^n$; teorema di Rouché - Capelli, teorema di Cramer ed espressione della soluzione del sistema quadrato

$$A\underline{x} = \underline{b}$$

come

$$\underline{x} = A^{-1}\underline{b}$$

cenni riguardo la linearitá dell'applicazione $\underline{x} \longrightarrow A\underline{x}$.

29. Sistemi lineari omogenei e loro soluzioni. Esercizi svolti in aula:

Studiare , al variare di $t \in \mathbb{R}$, le soluzioni dei sistemi lineari seguenti:

$$\begin{cases} x + tz = 1 \\ -tx + y = 1 \\ x + y = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x - y + tz = 1 \\ 2x + ty + 4z = 5 \end{cases}$$

Matrici reali simmetriche definite positive e negative, semidefinite positive e negative, indefinite. Caratterizzazione delle matrici definite positive e negative ; esempi.

30. Funzioni di due variabili: dominio, cenni alla continuitá; definizione di massimo e minimo relativo (vedi figura 2 e 3 rispettivamente); cenni al teorema di Weierstrass, differenziale primo , equazione del piano tangente e punti stazionari, condizioni del primo ordine per i punti di estremo locale, formula di Taylor arrestata al differenziale di secondo ordine, condizioni del secondo ordine per i punti di estremo locale. Punti di sella: vedi figura 4.

31. Cenni alla relazione tra le curve di livello (vedi figura 5) e il vettore gradiente. Esercizi su domini, calcolo delle derivate parziali, massimi e minimi liberi:

$$z = x^2 - y^2 \qquad z = xe^x + y^2 \qquad z = 2x^2y - xy^2 + 2xy - y^2$$

32. Esercizi di algebra lineare svolti in aula: sistemi lineari quadrati e non, con o senza parametri, soluzioni scritte come sottospazi vettoriali o affini.

Applicazioni

1. Metodo dei minimi quadrati.
   Introduzione alla Matematica Finanziaria: operazioni di investimento e finanziamento, tassi di interesse e sconto, fattori di capitalizzazione ed anticipazione, relazione fra di essi. Regimi finanziari dell'interesse semplice e composto. Calcolo del valore attuale di un progetto finanziario mediante tassi di valutazione. Cenni a strumenti finanziari come Bot e Btp. Duration di un titolo ed applicazioni al calcolo del valore attuale di esso.

2. Simulazione prova scritta. La soluzione completa della prova scritta sará disponibile tra il materiale didattico di questo A.A.

Programma delle esercitazioni svolte per il medesimo corso tenute dalla Prof.ssa I. Valdivia.

1. Equazioni primo e secondo grado, disequazioni primo e secondo grado. equazioni fratte e disequazioni fratte. topologia retta.

2. Ancora su topologia della retta. Retta. Funzioni iniettive, suriettive e biiettive. Iniziato studio dominio e segno di funzioni razionali fratte e funzioni irrazionali.

3. Dominio e segno di funzioni. Successioni.

4. Successioni.

5. Successioni e serie geometriche.

6. Si veda materiale didattico A.A.2013/2014

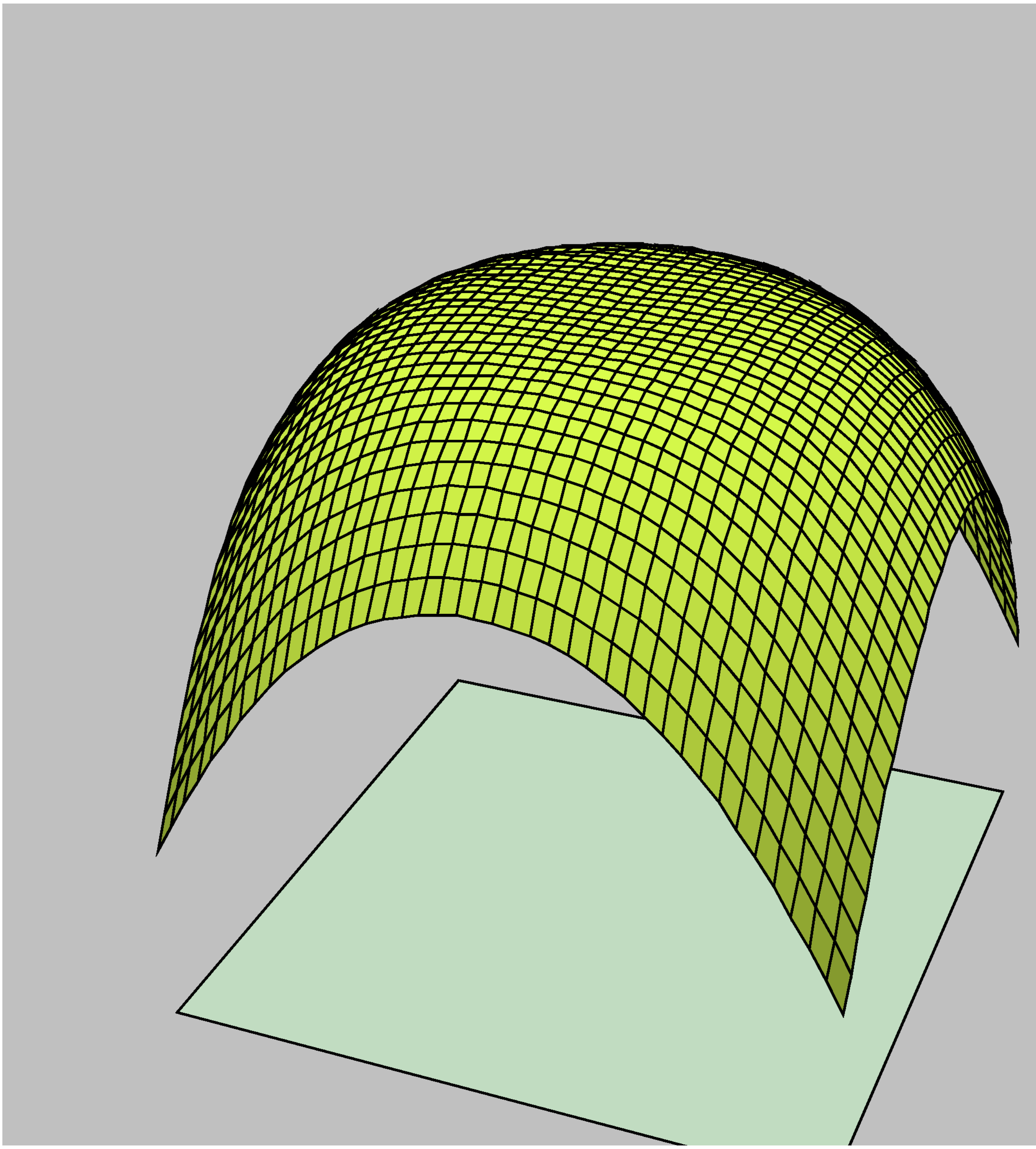

Figure 2: Superficie di equazione $z = \cos(x^2 + y^2)$ in un intorno dell'origine.

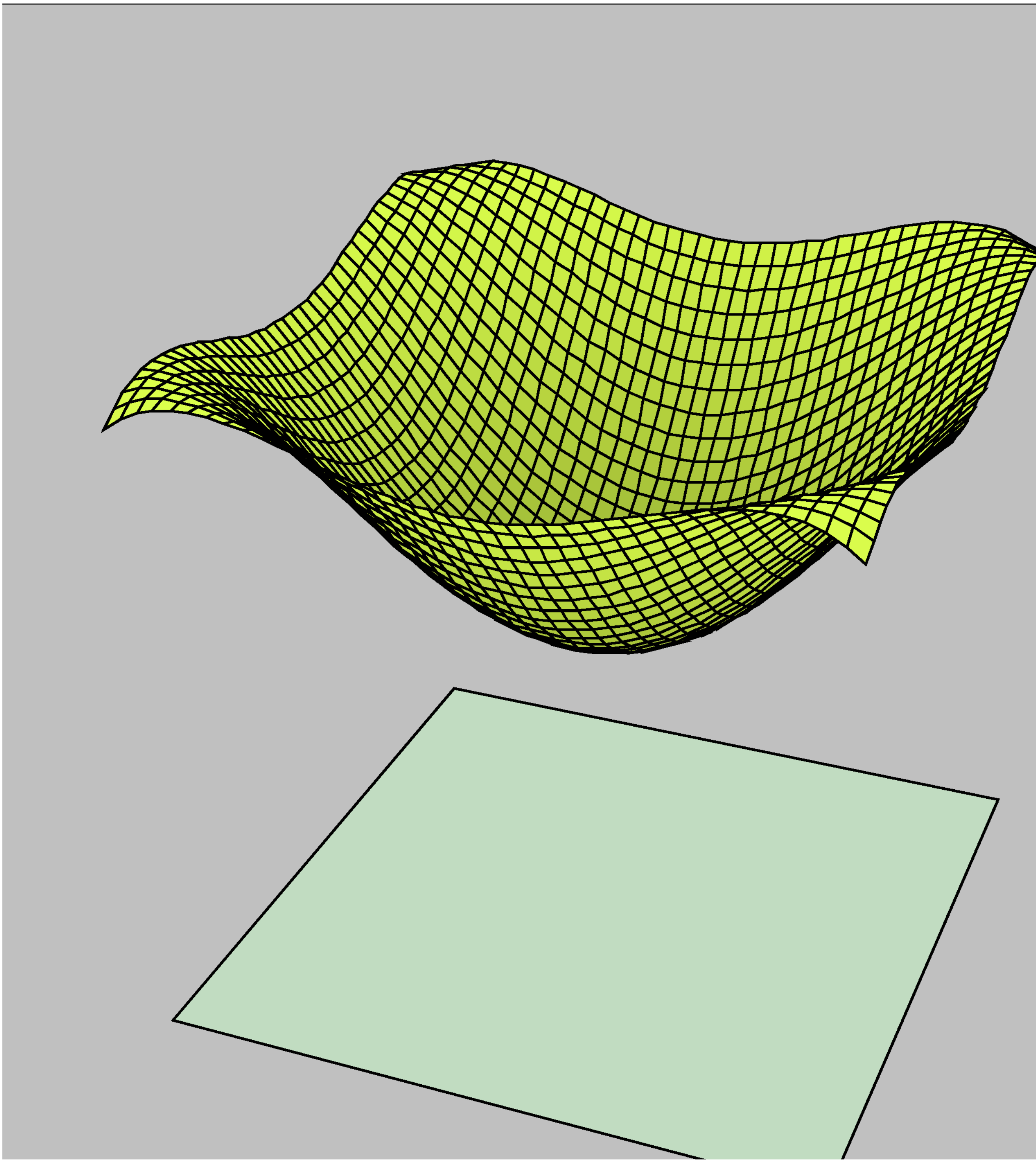

Figure 3: Superficie di equazione $z = \sin(x^2 + y^2)$ in un intorno dell'origine.

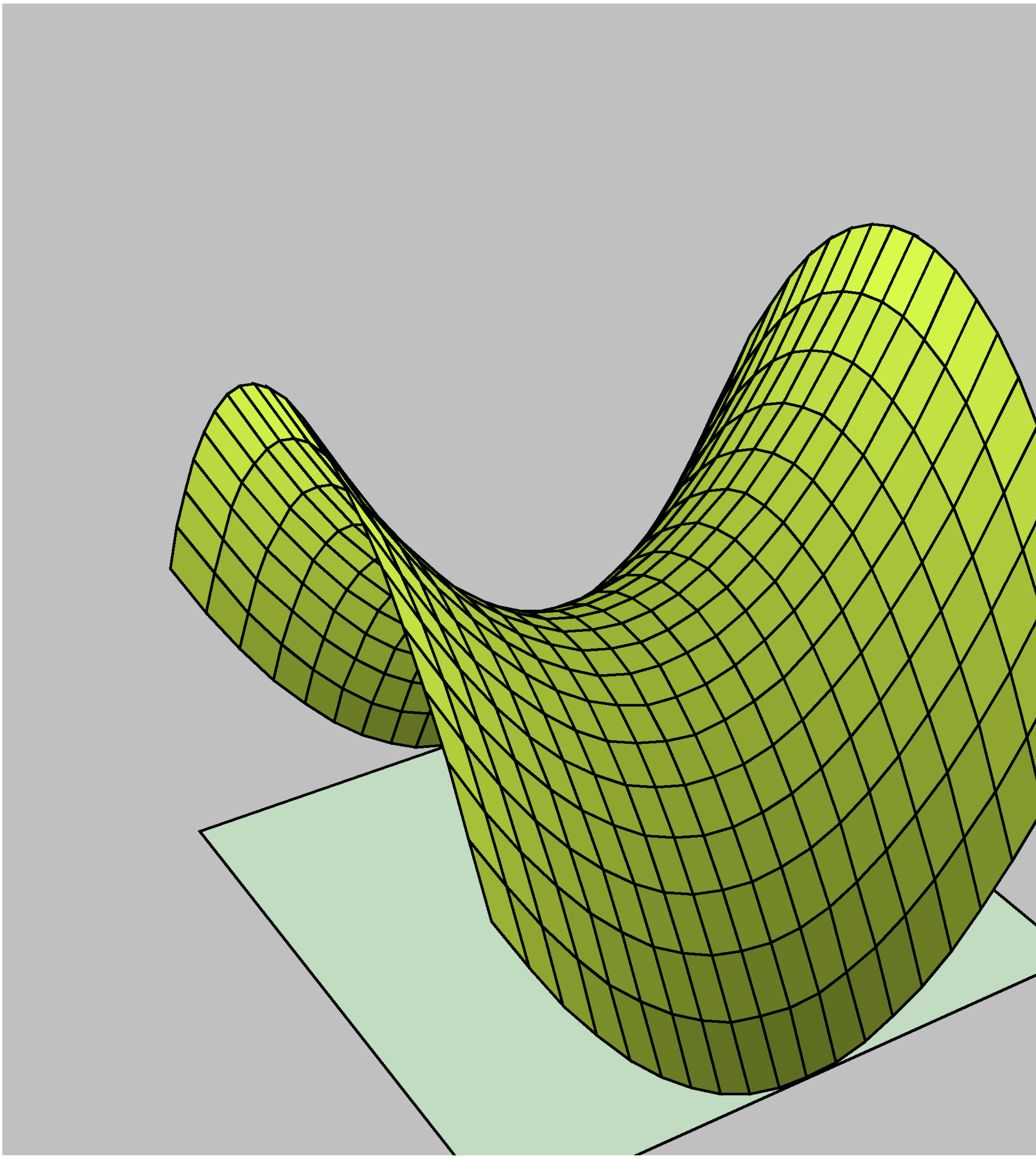

Figure 4: Superficie di equazione $z = x^2 - y^2$ in un intorno dell'origine.

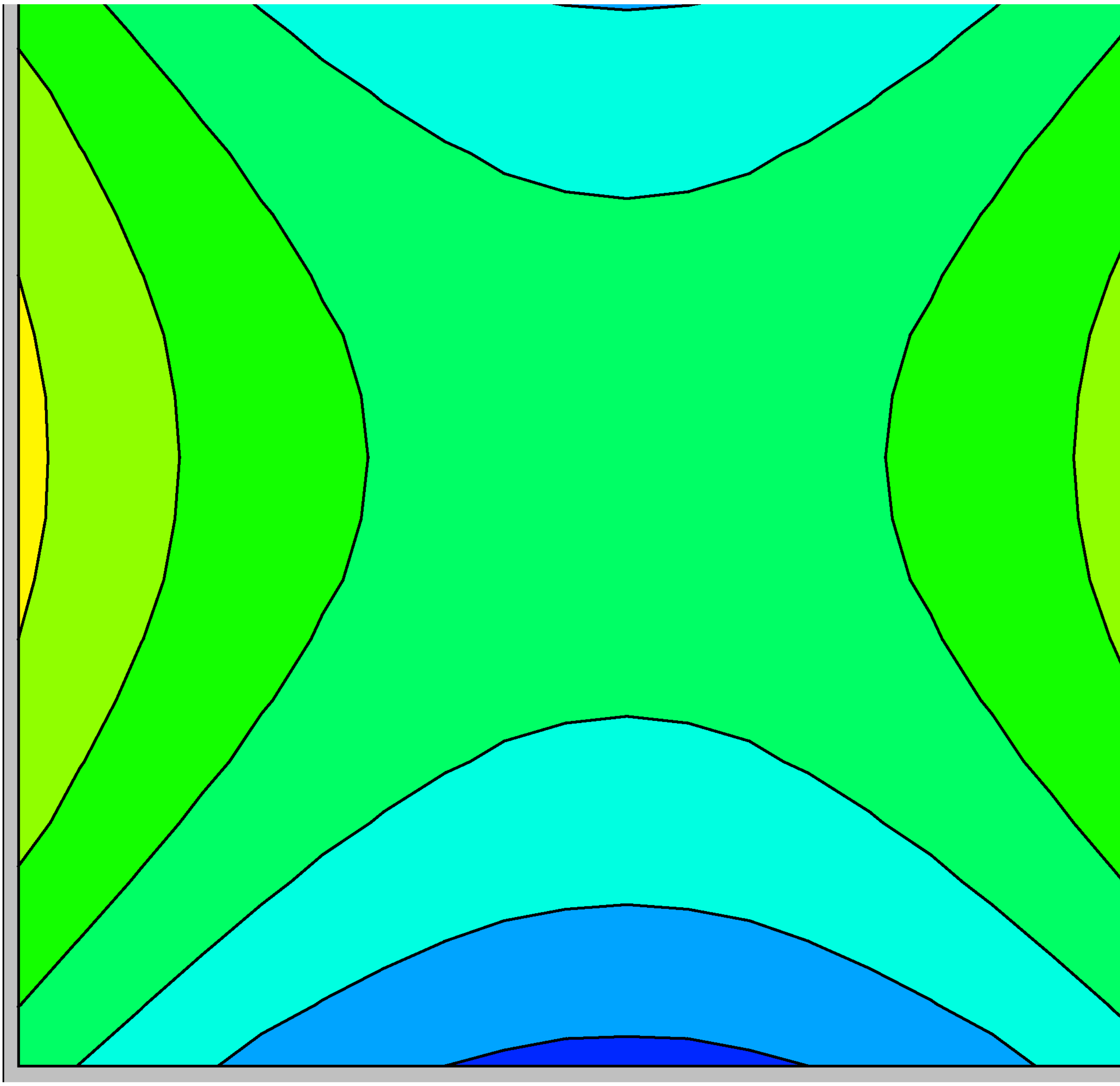

Figure 5: Curve di livello di $z = x^2 - y^2$.