Università degli Studi di Roma "Tor Vergata"

MATEMATICA GENERALE
Prof. Manzini

Argomenti trattati durante l'esercitazione di Lunedì 4 Novembre 2013

- Limiti
  - Verifica di definizione di limite
  - Confronto tra infiniti e confronto tra infinitesimi
  - Calcolo di limiti in forme indeterminate attraverso il riconoscimento di limiti notevoli, scomposizioni algebriche e razionalizzazioni
  - Definizioni di asintoto verticale e di asintoto orizzontale
- Continuità
  - Verifica di definizione di continuità
  - Tipi di discontinuità ed esercizi relativi
  - Riconoscimento di casi in cui avviene prolungamento per continuità
  - Teorema di Weierstrass

Esercizi svolti in aula e da svolgere a casa

- Verificare con la definizione che

$$\lim_{x\to 3}(4x-5)=7;$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}=+\infty;$$
$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=+\infty;$$
$$\lim_{x\to +\infty}\frac{1}{x}=0;$$
$$\lim_{x\to -\infty}\frac{1}{x}=0;$$
$$\lim_{x\to +\infty}\sqrt{x}=+\infty.$$

- Calcolare i seguenti limiti

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2+2x-1}{x^2+1};$$
$$\lim_{x\to\infty} \frac{4x^3+2x}{x^4+7x-1};$$
$$\lim_{x\to 1^+} \frac{1}{x-1};$$
$$\lim_{x\to 1^-} \frac{1}{x-1};$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sqrt{1-\cos x}};$$
$$\lim_{x\to 1} e^{\frac{1}{x-1}};$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(2+x)-\log 2}{3x};$$
$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x}(\sqrt{1+x}-\sqrt{x});$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos 2x}{\sin^2 3x};$$
$$\lim_{x\to 0}(\sqrt{1+x})^{\frac{1}{\sin x}};$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^3 x}{\tan^2 x};$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{1+\sin x-\cos x}{1-\sin x-\cos x};$$
$$\lim_{x\to 1} \frac{4x-x^2}{1-x^2};$$
$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3+3x^2+3x+1}{x^3-x^2+x-1};$$
$$\lim_{x\to -1^+} \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{1-x}-\sqrt{2}};$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sqrt{1-\cos x}};$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{4\log x-5}{3\log x+2};$$
$$\lim_{x\to\pm\infty} \sqrt[3]{x^3+x^2}-x;$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x/7)}{\log_2(1+x)};$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{3x};$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x^2)}{x^2\sin^2(x)};$$
$$\lim_{x\to\pi} \frac{\sin x}{x-\pi};$$

- Verificare la continuità delle seguenti funzioni

$$f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{se } x \leq 1 \\ \frac{5-x}{2} & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} & \text{se} \;\; x \neq 0 \\ 5 & \text{se} \;\; x = 0 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x}} & \text{se} \;\; x \neq 0 \\ 0 & \text{se} \;\; x = 0 \end{cases}$$

- Studiare la continuità delle seguenti funzioni, eliminando le eventuali discontinuità eliminabili

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x}};$$
$$f(x) = \frac{x^2+|x-1|-1}{x-1}$$
$$f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} + x$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} & \text{se} \;\; x \geq 0, \;\; x \neq 1, \\ 0 & \text{se} \;\; x = 1 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\log(x+1)}{x} & \text{se} \;\; x \in (-1,0), \\ \frac{e^x-1}{x} & \text{se} \;\; x > 0 \end{cases}$$

- Determinare i valori di α per cui le seguenti funzioni sono continue sul proprio dominio

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\tan x}{x} + 3 & \text{se} \;\; x < 0, \\ (x-1)^2 + \alpha & \text{se} \;\; x \geq 0 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} + 1 & \text{se} \;\; x \geq 0 \\ \sin(x+\alpha) & \text{se} \;\; x < 0 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} \alpha 2^x + 3 & \text{se} \;\; x \leq 0, \\ \frac{x(\sqrt{x+1}-1}{\tan(x^2)} & \text{se} \;\; x > 0 \end{cases}$$

- Dire se le seguenti funzioni soddisfano le ipotesi del teorema di Weierstrass sull'intervallo indicato

$$f(x) = x^2, \qquad I = [0, +\infty)$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} & \text{se} \;\; x \neq 0 \\ 0 & \text{se} \;\; x = 0 \end{cases} \quad I = [-1, 1]$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\log x} & \text{se} \;\; x > 0, \;\; x \neq 1 \\ 0 & \text{se} \;\; x = 0 \end{cases} \quad I = [0, \frac{1}{e}].$$

- Determinare a, $b \in \mathbb{R}$ tali che la funzione

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{se} \;\; x < 0 \\ 2 + a(x-3) & \text{se} \;\; 0 \leq x < 3 \\ \frac{1}{(x-b)^3} - 1 & \text{se} \;\; x \geq 3 \end{cases}$$

soddisfi le ipotesi del teorema di Weierstrass sull'intervallo $[-1, 3]$.