Il numero e

Consideriamo le successioni

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \; ; \; b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Dimostriamo innanzitutto che $(a_n)_n$ è monotona non decrescente, cioè che per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha $a_n < a_{n+1}$.

Dimostrazione. Intanto riscriviamo a_n come

$$a_n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n$$

quindi

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-1} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \frac{\left(\frac{n-1}{n}\right)^n}{\frac{n-1}{n}}.$$

Allora

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^n}{1-\frac{1}{n}}.$$

Applicando la disuguaglianza di Bernoulli a numeratore (dove quindi $n > 1$), con $x = -\frac{1}{n^2} \neq 0$ si trova quindi

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} > \frac{1+n\left(-\frac{1}{n^2}\right)}{1-\frac{1}{n}} = \frac{1-\frac{1}{n}}{1-\frac{1}{n}} = 1$$

il che prova che $a_n > a_{n-1}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.
Analogamente si prova che la successione $(b_n)_n$ è decrescente.
Inoltre è evidente che essendo $1+\frac{1}{n} > 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ risulta

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = b_n.$$

Questo comporta in particolare che

$$2 = a_1 < a_n < b_n < b_1 = 2^2 = 4$$

Quindi tutta la successione $(a_n)_n$ è limitata, e perciò, applicando il Teorema di regolarità delle successioni monotone,

$$2 < \lim_{n\to+\infty} a_n = \sup\{a_n, n \in \mathbb{N}\} < 4.$$

Il limite suddetto è detto *numero di Nepero* e viene denotato con il simbolo e. Si può dimostrare che è un numero irrazionale, qundi possiamo scriverne solo delle approssimazioni, ad esempio $e \cong 2,71828$.
Abbiamo pertanto ottenuto un importante limite notevole delle successioni

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e. \tag{1}$$

Osserviamo che anche $\lim_{n\to+\infty} b_n = e$ in quanto

$$b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \left(1+\frac{1}{n}\right)$$

ed utilizzando il Teorema del limite del prodotto, si ha

$$\lim_{n\to+\infty} b_n = \lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right) = e \cdot 1 = e.$$

Dimostriamo ora che

$$\lim_{x\to+\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e.$$

Se consideriamo $x \geq 1$ si ha

$$\left(1+\frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]} < \left(1+\frac{1}{x}\right)^x < \left(1+\frac{1}{[x]}\right)^{[x]+1}.$$

Il primo e l'ultimo membro della catena di disuguaglianze si comportano come due successioni; quando $x \to +\infty$ anche $[x] \to +\infty$ e quindi l'ultimo membro nella catena delle disuguaglianze, che coincide con la successione $(b_n)_n$ tende ad e.
Occupiamoci del primo membro, cioè della successione $\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n$. Si ha

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n = \frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{1+\frac{1}{n+1}}$$

e quindi sappiamo che il numeratore converge ad e ed il denominatore a 1; quindi anche il primo membro tende ad e. Per il Teorema dei carabinieri, abbiamo provato che

$$\lim_{x\to+\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e.$$

Da questo limite si ricava anche facilmente che

$$\lim_{x\to-\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e.$$

Infatti

$$\lim_{x\to-\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{t\to+\infty} \left(1-\frac{1}{t}\right)^{-t} = \lim_{t\to+\infty} \left(\frac{t-1}{t}\right)^{-t}$$

$$= \lim_{t\to+\infty} \left(\frac{t}{t-1}\right)^t = \lim_{t\to+\infty} \left(\frac{t-1+1}{t-1}\right)^t = \lim_{t\to+\infty} \left[\left(1+\frac{1}{t-1}\right)^{t-1} \left(1+\frac{1}{t-1}\right)\right] = e \cdot 1 = e.$$