

MATEMATICA GENERALE - Canali II, III, IV

Sessione Invernale, II Appello, 26/01/10, A.A. 2009/2010 - Compito 2

Cognome Nome Matricola

Canale ☐ II (Prof. Scarlatti) ☐ III (Prof.ssa Fabretti) ☐ IV (Prof.ssa Tessitore)

Firma

1) (10 p.ti) Studiare la funzione $f(x) = \frac{2-x}{\sqrt{1-x}}$

a) Dominio:

$$D = (-\infty, 1)$$

Segno: Sempre positiva in D .

b) Limiti

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty$$

$x = 1$ asintoto verticale

c) Determinazione punti critici (ovvero stazionari)

$$f'(x) = \frac{x}{2(1-x)\sqrt{1-x}}$$

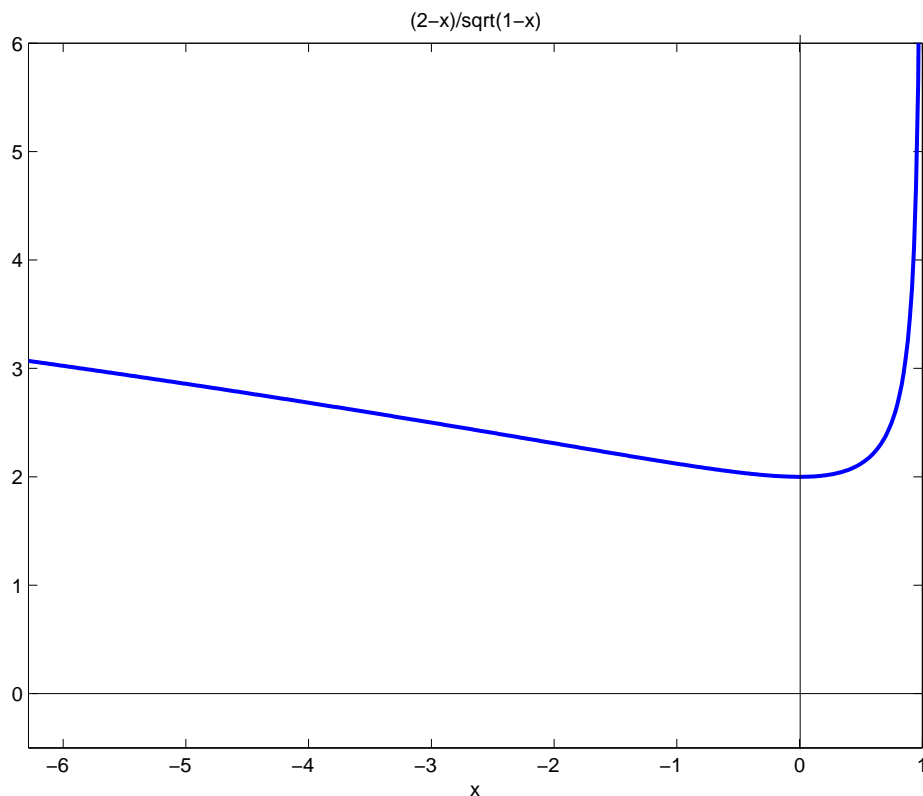
Punto stazionario $x = 0$.

d) Studio massimi e minimi

$$\begin{array}{lll} f'(x) < 0 & \text{funzione decrescente per} & x < 0 \\ f'(x) > 0 & \text{funzione crescente per} & 0 < x < 1 \end{array}$$

$x = 0$ punto di minimo

$f(0) = 2$ valore minimo



2) Rispondere ai seguenti quesiti:

- (1 p.ti) Quando una qualsiasi funzione $f(x)$ è continua in un punto x_0 interno al suo dominio?
- (4 p.ti) Per quale valore del parametro b la seguente funzione $f(x)$ è continua in $x_0 = 1$?

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3^x - 3}{x - 1} & x < 1 \\ 3(x - 1) + b \log(3) & x \geq 1 \end{cases}$$

- (1 p.ti) Per tale valore $f(x)$ è anche continua su tutto il suo dominio?

Soluzione:

Una funzione è continua in x_0 se $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

Si calcola

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} 3(x - 1) + b \log(3) = b \log(3)$$

Si calcola, usando il teorema del De l'Hopital,

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{3^x - 3}{x - 1} = 3 \log(3).$$

Considerando che $f(1) = b \log(3)$, risulta che la funzione è continua solo se $b = 3$.

Dato che $x = 1$ è l'unico punto di potenziale discontinuità (a seconda del valore di b) per la funzione, la funzione per $b = 3$ è continua in tutto \mathcal{D} .

3) (8 p.ti) Studiare al variare del parametro $t \in \mathbb{R}$ le soluzioni del sistema e trovarle:

$$\begin{cases} x + y - z = 4 - t^2 \\ -2x - 2y + 2z = 0 \\ y = t \end{cases}$$

Soluzione:

Matrice dei coefficienti

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (1)$$

Matrice completa

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 4 - t^2 \\ -2 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & t \end{pmatrix} \quad (2)$$

La matrice dei coefficienti ha sempre rango pari a 2.

La matrice completa ha rango pari a 3 se $t \neq \pm 2$, quindi per tali valori non esiste soluzione.

Se $t = -2$ le matrici hanno entrambe rango pari a 2, esistono ∞^1 soluzioni del tipo $(\alpha + 2, -2, \alpha)$.

Se $t = +2$ le matrici hanno entrambe rango pari a 2, esistono ∞^1 soluzioni del tipo $(\alpha - 2, 2, \alpha)$.

Individuare la risposta corretta nelle seguenti domande a risposta multipla. Ogni risposta esatta vale 2 punti, ogni risposta sbagliata -1 punto, risposta non data 0 punti.

La risposta corretta è evidenziata in grassetto

4) (2 p.ti) Il limite

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \left(\frac{1}{x} \right)$$

1. vale ∞
2. non esiste
3. **vale 1**
4. vale 0

5) (2 p.ti) Sia definita la funzione $F(x) = \int_0^x \log(t^2 - 2t + 2)dt$, possiamo affermare che

1. la funzione $F(x)$ ammette un punto di massimo in $x = 1$
2. **la funzione è crescente in $(0, +\infty)$**
3. la funzione $F(x)$ è decrescente in $(0, 1)$
4. nessuna delle precedenti

6) (2 p.ti) Se la successione $\{a_n\}$ converge a l , la successione $\{c_n\}$ converge a l' con $l < l'$ e $a_n \leq b_n \leq c_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$, che si può dire della successione $\{b_n\}$?

1. converge
2. è indeterminata
3. **non si può dire nulla**
4. diverge

7) (2 p.ti) I vettori \mathbf{v}, \mathbf{w} sono tra loro linearmente indipendenti. Allora possiamo concludere che

1. appartengono a uno spazio vettoriale di dimensione pari a 2
2. **appartengono a uno spazio vettoriale almeno di dimensione 2**
3. appartengono a \mathbb{R}^2
4. nessuno dei precedenti