C.2

Numero di Nepero

Pag. 74 ⟵ **Proprietà della successione** $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

Dimostriamo separatamente le seguenti proprietà.

Proprietà C.2.1 *La successione* $\{a_n\}$ *è strettamente crescente.*

Dimostrazione. Usando la formula del binomio di Newton (1.13) e la (1.11), possiamo scrivere

$$
\begin{aligned}
a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \frac{n}{n} \frac{n-1}{n} \cdots \frac{n-k+1}{n} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \cdot 1 \cdot \left(1-\frac{1}{n}\right) \cdots \left(1-\frac{k-1}{n}\right) ; \qquad \text{(C.2.1)}
\end{aligned}
$$

analogamente si ha

$$
a_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!} \cdot 1 \cdot \left(1-\frac{1}{n+1}\right) \cdots \left(1-\frac{k-1}{n+1}\right) . \qquad \text{(C.2.2)}
$$

Osserviamo che

$$
\left(1-\frac{1}{n}\right) < \left(1-\frac{1}{n+1}\right) , \quad \cdots \quad , \left(1-\frac{k-1}{n}\right) < \left(1-\frac{k-1}{n+1}\right)
$$

e dunque ogni addendo della sommatoria (C.2.1) è minore del corrispondente addendo in (C.2.2). Inoltre quest'ultima sommatoria contiene un ulteriore termine positivo corrispondente a $k = n+1$. Pertanto $a_n < a_{n+1}$, per ogni n. $\square$

Proprietà C.2.2 *La successione $\{a_n\}$ è limitata, più precisamente*

$$2 < a_n < 3\,, \qquad \forall n > 1\,.$$

Dimostrazione. Poiché $a_1 = 2$ e la successione è strettamente monotona per la proprietà precedente, si ha $a_n > 2\,, \forall n > 1$.

Verifichiamo ora che $a_n < 3\,, \forall n > 1$. Ricordando la (C.2.1) e osservando che $k! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots k \geq 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdots 2 = 2^{k-1}$, si ha

$$\begin{aligned} a_n &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \cdot 1 \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) < \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \leq 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} = 1 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^k}\,. \end{aligned}$$

Grazie all'Esempio 5.27, otteniamo

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^k} = \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} = 2\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) < 2\,.$$

Pertanto $a_n < 3$. □

Proprietà C.2.3 *Il numero* e *di Nepero è un numero irrazionale, strettamente compreso tra* 2 *e* 3*.*

Dimostrazione. Notiamo innanzitutto che, usando il primo teorema del confronto per le successioni (pag. 142, Teorema 4.), dalla proprietà precedente segue immediatamente che

$$2 < \mathrm{e} \leq 3\,. \tag{C.2.3}$$

Supponiamo ora per assurdo che e sia un numero razionale, ovvero che esistano due interi m_0 e $n_0 \neq 0$ tali che $\mathrm{e} = \dfrac{m_0}{n_0}$. Ricordando la formula, valida per ogni $n \geq 0$,

$$\mathrm{e} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \frac{\mathrm{e}^{\bar{x}_n}}{(n+1)!}\,, \qquad 0 < \bar{x}_n < 1$$

(si veda l'Osservazione 7.4), si ha

$$n!\mathrm{e} = n!\frac{m_0}{n_0} = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!} + \frac{\mathrm{e}^{\bar{x}_n}}{n+1}\,. \tag{C.2.4}$$

Dalla monotonia della funzione esponenziale e dalla (C.2.3), deduciamo che

$$1 = \mathrm{e}^0 < \mathrm{e}^{\bar{x}_n} < \mathrm{e} < 3\,.$$

Scegliendo ora $n \geq \max(3, n_0)$, i numeri $n!\dfrac{m_0}{n_0}$ e $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!}$ risultano interi, mentre la quantità $\dfrac{e^{\bar{x}_n}}{n+1}$ risulta strettamente compresa tra 0 e 1. Dunque l'identità (C.2.4) è assurda. Pertanto e è irrazionale e nella (C.2.3) non può valere il segno di uguaglianza. □

Pag. 108 ⟵ Dimostrazione della Proprietà 4.20

Proprietà 4.20 *Vale il seguente risultato*

$$\lim_{x\to\pm\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e}.$$

Dimostrazione. Consideriamo dapprima il limite per $x \to +\infty$. Indicata con $n = [x]$ la parte intera di x (si veda Esempi 2.1), per definizione si ha $n \leq x < n+1$; da ciò segue che $\dfrac{1}{n+1} < \dfrac{1}{x} \leq \dfrac{1}{n}$, ossia $1 + \dfrac{1}{n+1} < 1 + \dfrac{1}{x} \leq 1 + \dfrac{1}{n}$. Usando note proprietà delle potenze, si ottiene

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n \leq \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^x < \left(1+\frac{1}{x}\right)^x \leq \left(1+\frac{1}{n}\right)^x < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

e dunque

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{-1} < \left(1+\frac{1}{x}\right)^x < \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \left(1+\frac{1}{n}\right). \quad \text{(C.2.5)}$$

Osserviamo ora che quando x tende a $+\infty$ anche n tende a $+\infty$. Usando la (3.3), abbiamo

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \left(1+\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right) = \mathrm{e};$$

con la sostituzione $m = n+1$ otteniamo parimenti

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{-1} = \mathrm{e}.$$

Applicando il secondo Teorema del confronto 4.5 alle tre funzioni che compaiono nella (C.2.5), otteniamo la tesi per $x \to +\infty$. Consideriamo ora il limite per x tendente a $-\infty$. Se $x < 0$, possiamo scrivere $x = -|x|$ e dunque

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \left(1-\frac{1}{|x|}\right)^{-|x|} = \left(\frac{|x|-1}{|x|}\right)^{-|x|} = \left(\frac{|x|}{|x|-1}\right)^{|x|} = \left(1+\frac{1}{|x|-1}\right)^{|x|}.$$

Poniamo $y = |x| - 1$ e osserviamo che y tende a $+\infty$ quando x tende a $-\infty$. Pertanto,

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = \lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y+1} = \lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y}\lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right) = \mathrm{e}.$$

Ciò termina la dimostrazione della proprietà. □