ESERCIZI MATEMATICA GENERALE - Canale III

Prof. A. Fabretti[1] A.A. 2009/2010

Limiti di funzione

Calcolare i seguenti limiti

1)

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{1}{\sqrt{x^2-4}}$$

2)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2+2x-1}{x^2+1}$$

3)

$$\lim_{x\to\infty} \log\left(\frac{3x^2+2x-1}{x^2+1}\right)$$

4)

$$\lim_{x\to\infty} \exp\left(\frac{3x^2+2x-1}{x^2+1}\right)$$

5)

$$\lim_{x\to\infty} \cos\left(\frac{3x^2+2x-1}{x^3+1}\right)$$

6)

$$\lim_{x\to 3^-} \frac{x^2-5}{x-3}$$

6)

$$\lim_{x\to 3^+} \frac{x^2-5}{x-3}$$

Per ognuna delle seguenti funzioni definire il dominio e svolgere i limiti per $x \to \pm\infty$ se il dominio lo permette.

1)

$$f(x) = \frac{3x^2-5}{x-3}$$

2)

$$f(x) = \frac{5-2x}{|x-3|}$$

3)

$$f(x) = \log\left(\frac{5-2x}{x-3}\right)$$

[1] Si prega di segnalare errori o imprecisioni a *annalisa.fabretti@uniroma2.it*

Per ognuna delle seguenti funzioni definire il dominio, studiare segno, calcolare i limiti della funzione e fare cenni di grafico

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x+2}$$
$$f(x) = e^{\frac{x}{-1+\log x}}$$
$$f(x) = \frac{\log(e^x+2)}{x^2}$$
$$f(x) = \frac{2e^x}{e^x-1}$$
$$f(x) = \frac{1}{\log(2x-1)}$$
$$f(x) = e^{\frac{x}{x+1}}$$
$$f(x) = \log\left(\frac{e^{2x}}{e^x-2}\right)$$

Continuità

1)Studiare la continuità della funzione $f(x)$ in $x=0$ specificando in caso di discontinuità la tipologia.

$$f(x) = \begin{cases} \left(\frac{1}{1+x}\right)^{\frac{1}{x}} & \text{se} \quad x<0 \\ \frac{1}{x+e} & \text{se} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

2)Studiare la continuità della funzione $f(x)$ in $x=0$ e in $x=1$ specificando in caso di discontinuità la tipologia.

$$f(x) = \begin{cases} 1-x & \text{se} \quad x \leq 0 \\ \frac{\sqrt{x^4}-x}{x-\sqrt{x}} & \text{se} \quad 0<x<1 \\ \frac{1}{(x+1)^2} & \text{se} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

3)Trovare il valore di c per cui la funzione $f(x)$ risulta continua in $x=3$

$$f(x) = \begin{cases} c & \text{se} \quad x<3 \\ 2x-1 & \text{se} \quad x \geq 3 \end{cases}$$

4)Trovare il valore di a per cui la funzione $f(x)$ risulta continua in x=0

$$f(x) = \begin{cases} e^x+a & \text{se} \quad x \leq 0 \\ x-1 & \text{se} \quad x>0 \end{cases}$$

Domande teoriche

1)Dare la definizione di $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = -\infty$.
2) Dare la definizione di $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = l$.
3) Dare la definizione di funzione continua.
4) Se la funzione $f(x)$ ha un ordine di infintesimo maggiore della funzione $g(x)$ per $x \to x_0$ il limite di $\frac{f(x)}{g(x)}$ esiste? Che valore assume? Motivare la risposta con degli esempi.
5) Se la funzione $f(x)$ ha un ordine di infinto maggiore della funzione $g(x)$ per $x \to \infty$ il limite di $\frac{f(x)}{g(x)}$ esiste? Che valore assume? Motivare la risposta con degli esempi.
6) Se la funzione $f(x)$ una funzione che non ammette limite in ∞ ma è limitata e la funzione $g(x)$ è una funzione infinitesima per $x \to \infty$, il limite $\lim_{x \to \infty}$ esiste? se esiste che valore assume?
7) Dimostrare per confronto che la funzione $f(x) = \frac{\cos x}{x^2+1}$ per $x \to \infty$ ammette limite e questo limite zero.
8) Dimostrare il limite notevole $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$.
9) Dare la definizione di continuità di una funzione $f(x)$.
10) Elencare le tipologie di discontinuità note e fornire per ognuna degli esempi.
11) Enunciare il teorema di Weierstrass
12) Enunciare il teorema dei valori intermedi
13) Se una funzione assume valori discordi agli estremi di un intervallo chiuso e limitato cosa possiamo affermare?
14) La funzione $f(x) = 3 - 2|x + 1|$ è continua in $x = -1$? Motivare la risposta.

Domande teoriche, risposta multipla

1) Sia funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, se il $\lim_{x\to+\infty} f(x) = l$ con $l > 0$ si può dire che :

1. esiste un intorno di $x = 0$ per cui $f(x) > 0$
2. esiste un x^* tale che per ogni $x > x^*$ vale $f(x) > 0$
3. esiste un x^* tale che per ogni $x < x^*$ vale $f(x) < 0$
4. nessuna delle precedenti

2) Sia funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, se il $\lim_{x\to+\infty} f(x) = l$ con $l \leq 0$ si può dire che :

1. esiste un intorno di $x = 0$ per cui $f(x) > 0$
2. esiste un x^* tale che per ogni $x > x^*$ vale $f(x) > 0$
3. esiste un x^* tale che per ogni $x < x^*$ vale $f(x) < 0$
4. nessuna delle precedenti

3) La funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $f(x) = x^2 - 2x$:

1. ammette limite $\forall x \in \mathbb{R}$
2. non ammette limite per $x \to \infty$
3. ammette limite solo per le x positive
4. nessuna delle precedenti

4) Se $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, quale delle seguenti affermazioni è sempre verificata?

1. Qualsiasi numero reale x minore di -100 tale che $f(x) < -100$
2. Esiste un numero reale x minore di -100 tale che $f(x) < -100$
3. Esiste un numero reale x maggiore di -100 tale che $f(x) < -100$
4. Nessuno dei precedenti

5) Se $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$, quale delle seguenti affermazioni non é mai verificata?

1. $\forall \epsilon > 0$ esiste un intorno di x_0 tale che $|f(x) - l| < \epsilon$
2. Esiste un intorno di x_0 tale che $|f(x) - l| < 2$
3. se $l \leq 0$ esiste un intorno di x_0 tale che $f(x) < 0$
4. se $l > 0$ esiste un intorno di x_0 tale che $f(x) > 0$

6) Il limite $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$:

1. non esiste
2. vale 0
3. vale 1
4. nessuna delle precedenti

7) Il limite $\lim_{x \to 0} \frac{x - \sin x}{x}$:

1. non esiste
2. vale 0
3. vale 1
4. nessuna delle precedenti

8) Il limite $\lim_{x \to 0} \frac{2x - \sin x}{x}$:

1. non esiste
2. vale 0
3. vale 1
4. nessuna delle precedenti

9) Il limite $\lim_{x \to \infty} x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$:

1. non esiste
2. vale 0
3. vale 1
4. nessuna delle precedenti

10) Esiste il limite $\lim_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x}$:

1. no
2. si, vale 0
3. è un limite notevole e vale 1
4. nessuna delle precedenti

11) Quale delle seguenti affermazioni è falsa :

1. il limite di $f(x)$ in x_0 esiste se esistono il limite destro e quello sinistro e sono uguali
2. il limite di $f(x)$ in x_0 non esiste se esistono il limite destro e quello sinistro e non sono uguali
3. il limite di $f(x)$ in x_0 esiste se esistono il limite destro e quello sinistro e sono finiti
4. il limite di $f(x)$ in x_0 esiste se la funzione è continua in x_0.

12) La funzione $f(x) = \frac{1-e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{1}{x}}}$ ha asintoto orizzontale :

1. $y = 1$
2. $y = 0$
3. $y = 1/2$
4. nessuna delle precendeti

13) La funzione $f(x) = \frac{|x-2|}{1-|x|}$:

1. ha asintoto orizzontale $y = 1$
2. ha asintoto orizzontale $y = -1$
3. non ammette asintoto orizzontale perch i due limiti a $\pm\infty$ sono diversi
4. nessuna delle precendeti

14) Una funzione $f(x)$ continua su $[a, b]$ ammette sempre

1. un massimo e/o un minimo relativo
2. un massimo e un minimo assoluto
3. almeno un punto di intersezione con l'asse x
4. nessuna delle precedenti

15) Una funzione $f(x)$ continua su $[a, b]$ con $f(a)f(b) < 0$ ammette sempre

1. un massimo e/o un minimo relativo
2. un punto x in cui $f(x) = a$
3. almeno un punto di intersezione con l'asse x
4. nessuna delle precedenti

16) Una funzione $f(x)$ continua su $[a, b]$ con $f(a) = \sqrt{7}$ e $f(b) = -1$ quali dei seguenti valori può non assumere:

1. $y = \sqrt{2}$
2. $y = 0$
3. $y = -\frac{3}{2}$
4. $y = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

17)Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} -x-2 & \text{se} \quad x \leq -2 \\ 3 & \text{se} \quad -2 < x \leq 1 \\ x^2 + 2x & \text{se} \quad x > 1 \end{cases}$$

si può affermare che

1. è continua in tutto $\mathbb{R}$
2. è continua in $x = -2$ e discontinua in $x = 1$
3. è continua $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$
4. è discontinua in $x = -2$ e in $x = 1$.