ESERCIZI MATEMATICA GENERALE - Canale III

Prof. A. Fabretti[1] A.A. 2009/2010

Calcolo derivate
Calcolare le derivate delle seguenti funzioni

1) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-4}}$

2) $f(x) = \frac{3x^2+2x-1}{x^2+1}$

3) $f(x) = \log\left(\frac{4x-3}{x^2+1}\right)$

4) $f(x) = \exp\left(\frac{3x^2+2x-1}{x^2+1}\right)$

5) $f(x) = \cos(3x - x^2)$

6) $f(x) = \frac{x^2-5}{x-3}$

7) $f(x) = \frac{3x^2-5}{x-3}$

8) $f(x) = \frac{5-2x}{|x-3|}$

9) $f(x) = \log\left(\frac{5-2x}{x-3}\right)$

10) $f(x) = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x+2}$

11) $f(x) = \frac{\log(e^x+2)}{x^2}$

12) $f(x) = \frac{1}{\log(2x-1)}$

13) $f(x) = e^{\frac{x}{x+1}}$

14) $f(x) = x^{x^2-5}$

15) $f(x) = e^{|x^2-5x|}$

16) $f(x) = \begin{cases} e^x + 3x & \text{se} \quad x \leq 1 \\ \frac{3x}{x^2-1} & \text{se} \quad x > 1 \end{cases}$

[1]Si prega di segnalare errori o imprecisioni a *annalisa.fabretti@uniroma2.it*

Retta tangente, Massimi e Minimi

1)Trovare la retta tangente in $x = 0$ alla funzione $f(x) = e^{x^2} + 1$.

2)Trovare la retta tangente in $x = 2$ alla funzione $f(x) = \frac{x+2}{2x^3-1}$.

3)Trovare la retta tangente in $x = 3$ alla funzione $f(x) = \log(\frac{x+2}{2x-1})$.

4)Sia $f(x) = x^3 - 3x$, trovare, se esistono, il massimo e il minimo assoluto su $D = [-3, 1]$.

5)Sia $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ trovare, se esistono, il massimo e il minimo assoluto su $D = \mathbb{R}$.

6)Sia $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ trovare, se esistono, il massimo e il minimo assoluto su $D = [-\sqrt{2}, 0]$.

Studio di funzione

Fare il grafico delle seguenti funzioni

1)

$$f(x) = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{(x-1)^2} + 2$$

2)

$$f(x) = \sqrt{x^3 - x^2 - x + 1}$$

3)

$$f(x) = \frac{e^{x-1}}{x} - 1$$

4)

$$f(x) = e^{\frac{x}{-1+\log x}}$$

5)

$$f(x) = \log\left(\frac{e^{2x}}{e^x - 2}\right)$$

6)

$$f(x) = e^{\frac{1+x^2}{1-x^2}}$$

7)

$$f(x) = (1-x)e^{-x^2}$$

8)

$$f(x) = \frac{e^x}{x-1}$$

Domande teoriche

1) Dare la definizione di derivata.
2) Discutere l'interpretazione geometrica della derivata.
3) Dimostrare la regola di derivazione per il prodotto di funzioni.
4) Dimostrare la regola di derivazione per il rapporto di funzioni.
5) Dimostrare che $D[\arcsin(x)] = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
6) Dimostrare che $D[\arccos(x)] = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
7) Dimostrare che $D[\log_a(x)] = \frac{1}{x}\log_a e$.
8) Dimostrare che una funzione derivabile è una funzione continua.
9) Discutere la condizione di non sufficienza della continuità al fine della derivabilità.
10) La funzione $f(x) = 3-2|x+1|$ è derivabile in $x = -1$? Motivare la risposta.
11) Enunciare il teorema di Rolle e dimostrarlo.
12) Enunciare il teorema di Lagrange e dimostrarlo.
13) Cosa possiamo affermare se una funzione ammette derivata prima nulla in x_0?
14) Cosa possiamo affermare se una funzione ammette derivata prima e seconda nulle in x_0?

Esercizi

1) Supponiamo che l'andamento della vendita (quantità in barili) di petrolio sia rappresentato, rispetto al prezzo al barile x (in dollari), dalla funzione $f(x) = 140x - x^2 - 4500$ e supponiamo che nell'ultimo periodo il prezzo al barile sia oscillato tra i valori 50 e 90 dollari. Quale è stata la quantità massima venduta? A quale prezzo? Quale la quantità minima? A quale prezzo?

2) Una casa produttrice di scarpe può produrre un paio di scarpe al costo di 7 euro al paio. Le scarpe vengono vendute al prezzo di 14 euro e a questo prezzo si vendono 15 paia di scarpe al giorno. La ditta ritiene che una diminuzione di un euro del prezzo di vendita farà vendere 2 paia in più al giorno. Scrivere l'espressione dela funzione di domanda e della funzione profitto. Calcolare il prezzo x in grado di massimizzare il profitto.

3) Una azienda produttrice realizza un certo bene al costo di 4 euro al pezzo. Si valuta che se ciascun pezzo viene venduto al prezzo x, verranno venduti $15 - x$ pezzi al giorno. Quale è la funzione profitto dell'azienda? Calcolare il prezzo x in grado di massimizzare il profitto.

Domande teoriche, risposta multipla

1) La retta $y = 2x - 1$ nel punto $x_0 = 1$ risulta tangente al grafico della funzione:

1. $f(x) = e^{x^2-1}$
2. $f(x) = e^{1/x-1}$
3. $f(x) = e^{1-x^2}$
4. $f(x) = e^{1-1/x}$

2) Sia $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ e sia che per un punto $x_0 \in (a, b)$ si ha $\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \neq \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$. Allora

1. il grafico di f non ha tangenti nel punto x_0
2. f non è continua in x_0
3. f non è derivabile in x_0
4. $f(x_0) = 0$

3) Se una funzione $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua in $[a, b]$ e derivabile in (a, b) soddisfa la condizione $f(a) = f(b)$ si può affermare che

1. la funzione è nulla in (a, b)
2. esiste un unico punto $c \in (a, b)$ tale che $f'(c) = 0$
3. esiste almeno un punto $c \in (a, b)$ tale che $f'(c) = 0$
4. la funzione è costante.

4) Se $f(x)$ ammette in x_0 derivata prima nulla, il punto x_0 è:

1. un punto di massimo o un punto di minimo
2. un punto di flesso
3. un punto critico
4. nessuno dei precedenti

5) La retta $y = mx + q$ tangente al grafico di una funzione f in un punto di massimo interno all'intervallo $[a, b]$, su cui la funzione è definita,

1. ha coefficiente angolare $m = 0$
2. ha coefficiente angolare $m > 0$
3. ha coefficiente angolare $m < 0$
4. non esiste

6) Se una funzione $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ è continua in $[0, 1]$ e derivabile in $(0, 1)$ con $f(0) = 2$ e $f(1) = 1$ possiamo affermare che

1. la funzione è decrescente $(0, 1)$
2. esiste almeno un punto $c \in (0, 1)$ tale che $f'(c) = -1$
3. esiste almeno un punto $c \in (0, 1)$ tale che $f'(c) = 0$
4. esiste almeno un punto $c \in (0, 1)$ tale che $f'(c) = 1$

7) La funzione $f(x) = |x - 2| + 3x$:

1. è continua e derivabile in $\mathbb{R}$
2. è continua ma non derivabile in $\mathbb{R}$
3. non è continua ne derivabile in $\mathbb{R}$
4. nessuna delle precedenti

8) La funzione $f(x) = e^{|x|} + 2|x - 2|$:

1. è continua e derivabile in $\mathbb{R}$
2. è derivabile in $\mathbb{R} \setminus \{0, 2\}$
3. non è continua ne derivabile in $\mathbb{R}$
4. nessuna delle precedenti

9) La derivata della funzione $f(x) = \log(2 + |x + 1|)$ in $x = -2$

1. non esiste
2. vale 1
3. vale $-\frac{1}{3}$
4. nessuna delle precedenti

10) La derivata della funzione $f(x) = \log(2 + |x + 1|)$ in $x = 1$

1. non esiste
2. vale 0
3. vale $\frac{1}{4}$
4. nessuna delle precedenti

11) La derivata della funzione $f(x) = \log(2 + |x + 1|)$ in $x = -1$

1. non esiste
2. vale 0
3. vale $\frac{1}{2}$
4. nessuna delle precedenti

12) La funzione $f(x) = \frac{1-e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{1}{x}}}$ ha derivata prima :

1. $f'(x) = \frac{-e^{\frac{1}{x}}}{e^{\frac{1}{x}}}$
2. $f'(x) = -\frac{2e^{\frac{2}{x}}}{x^2(1+e^{\frac{1}{x}})^2}$
3. $f'(x) = \frac{2e^{\frac{1}{x}}}{(1+e^{\frac{1}{x}})^2}$
4. nessuna delle precedenti

13) Se la funzione $f(x)$ ha derivata prima uguale a 2 in tutto $\mathbb{R}$, possiamo affermare che :

1. $f(x)$ è costante
2. $f(x) = 2x$
3. $f(x) = 2x + k$, con $k \in \mathbb{R}$
4. nessuna delle precedenti

14) La funzione $f(x) = e^x - x$ in $[-1, 2]$ ammette :

1. un massimo assoluto in $x = 2$ e un minimo assoluto in $x = -1$
2. un massimo assoluto in $x = -1$ e un minimo assoluto in $x = 0$
3. un massimo assoluto in $x = 2$ e un minimo assoluto in $x = 0$
4. nessuna delle precedenti

15) Se la funzione $f(x)$, derivabile, ammette un massimo locale in x_0 possiamo affermare che

1. esiste un $x < x_0$ tale che $f'(x) > 0$
2. esiste un $x < x_0$ tale che $f'(x) < 0$
3. per ogni $x < x_0$ vale $f'(x) > 0$
4. nessuna delle precedenti

16) Sia $f(x)$ una funzione continua su $[a, b]$ tale che $f(a) = f(b)$ si può dire che

1. esiste almeno un $c \in (a, b)$ tale che $f'(c) = 0$
2. non esiste un $c \in (a, b)$ tale che $f'(c) = 0$
3. la funzione è costante
4. nessuna delle precedenti