ESERCIZI MATEMATICA GENERALE - Canale III

Prof. A. Fabretti[1] A.A. 2009/2010

Calcolare i seguenti integrali immediati

1) $\int_1^2 (x^2+3x)dx$

2) $\int \frac{2x^2+1}{x} dx$

3) $\int \frac{5x^4-3x^2}{1+x^5-x^3} dx$

4) $\int (e^{(\cos x-1)} \sin x) dx$

5) $\int_0^{\log 2} \frac{t}{4-t^2} dt$

Risolvere i seguenti integrali con il metodo di integrazione per parti

1) $\int (x^3 e^{-x^2}) dx$

2) $\int_2^{e+1} ((3x^2-1)\log(x-1)) dx$

3) $\int (x \sin x) dx$

4) $\int_1^e (\sqrt{x}-1) \log x dx$

Risolvere i seguenti integrali con il metodo di sostituzione

1) $\int \frac{\sin(\log x)}{x} dx$

2) $\int_0^1 \frac{e^{2x}}{1+e^x} dx$

3) $\int_2^3 \sqrt{2x+1} dx$

4) $\int_0^1 x\sqrt{1+x^2} dx$

5) $\int_0^2 \frac{x^3}{1+x^2} dx$

6) $\int_1^2 \frac{2}{\sqrt{x}+5} dx$

7) $\int \frac{1}{x} \frac{\log(x)}{4-\log^2(x)} dx$

8) $\int \frac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{1-x}} dx$

[1] Si prega di segnalare errori o imprecisioni a *annalisa.fabretti@uniroma2.it*

Risolvere i seguenti integrali con uno dei metodi conosciuti

1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x - x\cos x)dx$

2) $\int \log\left(\frac{x-x^2}{x^3}\right) dx$

3) $\int_0^1 (3e^{-x} + xe^{-x^2} + 2e^{3x})dx$

4) $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x(\log x)^2} dx$

5) $\int_0^1 \frac{1}{x^2+2x+1} dx$

6) $\int \frac{2\sin x}{\cos x+\sin x} dx$

7) $\int \frac{x^2-x+2}{x^2-2x+2} dx$

Area, massimi e minimi

1)Trovare l'area della regione di piano delimitata dalla funzione $f(x) = 3x^2e^x$ e gli assi verticali $x = -2$ ed $x = 1$.

2)Date le funzioni $f(x) = -x^2 + 1$ e $g(x) = x + 1$, trovare l'area della regione di piano racchiusa tra le due funzioni; in altre parole, trovare l'area della regione A tale che $g(x) \leq y \leq f(x)$.

3)Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} e^{4x} + x^2 & se \quad x \leq 0 \\ \log(x+2) & se \quad x > 0 \end{cases}$$

calcolare l'area della regione di piano sottesa dalla funzione tra -1 e 3.

4)Sia data la funzione $F(x)$ definita su $(0, 2)$

$$F(x) = \int_0^x \frac{3t-2}{t^3+1} dt$$

trovare i suoi punti critici in $(0, 2)$ specificando se si tratta di massimi o di minimi.

5)Sia data la funzione $F(x)$ definita su $(0, 4)$

$$F(x) = \int_0^x \frac{3t}{t^2+1} dt$$

trovare la sua retta tangente in $x = 1$.

6)Data la funzione $F(x)$ definita su $(0, \infty)$

$$F(x) = \int_0^x \frac{3\sin(t)}{t^2+1} dt$$

dire se la funzione è concava o convessa in $x = \pi$.

Domande teoriche

1) Dare la definizione di integrale definito.
2) Dare la definizione di primitiva.
3) Dimostrare il teorema fondamentale del calcolo integrale.
4) Enunciare il teorema della media integrale.
5) Definire l'integrale indefinito.
6) Spiegare attraverso degli esempi sotto quali condizioni una funzione non continua può essere comunque integrabile.
7) Quali proprietà ha l'integrale definito?
8) Se $F(x)$ è la primitiva di $f(x)$ ed anche la primitiva di $g(x)$, possiamo dire che f e g coincidono?
9) Una funzione con un numero finito di discontinuità ed illimitata è integrabile?
10) La funzione $f(x) = 3 - 2|x + 1|$ è integrabile? Motivare la risposta.
11) Se $F(x)$ ed $G(x)$ sono primitive di $f(x)$, possiamo dire che F e G coincidono?

Domande teoriche, risposta multipla

1) Se $f(x)$ continua su $[0, 5]$, quale delle seguenti relazioni è vera?

1. $f(x)$ è integrabile ma non derivabile
2. $f(x)$ non è ne derivabile ne integrabile
3. $f(x)$ è integrabile, ma solo se limitata
4. Nessuno dei precedenti

2) Sia $F(x)' = f(x)$ con $f(x)$ continua su $[a, b]$. Allora

1. $\int_a^b F(x)dx = f(b) - f(a)$
2. $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$
3. $\int_a^b f(x)dx = F(x) + c$
4. nessuna delle precedenti

3) Sia $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, con $f(t)$ continua, possiamo affermare che

1. $F(x)$ è integrabile
2. $F(x)$ è derivabile e la sua derivata è $f(x)$,
3. $F(x)$ è continua ma non derivabile
4. nessuna delle precedenti.

4) Sia $f(x)$ una funzione continua tale che $\int_a^b f(x)dx = 3$, con $|b-a| = 3$, possiamo affermare che:

1. a e b sono positivi
2. che esiste un $c \in [a,b]$ tale che $f(c) = 3$
3. che esiste un $c \in [a,b]$ tale che $f(c) = 1$
4. nessuno dei precedenti

5) Sia $f(x)$ una funzione continua tale che $\int_1^3 f(x)dx = \frac{5}{2}$, possiamo affermare che:

1. che esiste un $c \in [1,3]$ tale che $f(c) = 1$
2. che esiste un $c \in [1,3]$ tale che $f(c) = 5$
3. che esiste un $c \in [1,3]$ tale che $f(c) = 10$
4. nessuno dei precedenti

6) Sia la funzione $F(x) = \int_0^x (e^t + 3)dt$ possiamo affermare che

1. la funzione è decrescente in $(0,1)$
2. esiste almeno un punto $c \in (0,1)$ tale che $F'(c) = -1$
3. la funzione è crescente
4. nessuna delle precedenti

7) La funzione $f(x) = |x-2| + 3x$:

1. è continua ed integrabile
2. è continua e derivabile in $\mathbb{R}$
3. non è continua ne derivabile in $\mathbb{R}$
4. nessuna delle precedenti

8) La funzione $f(x) = e^{|x|} + 2|x-2|$:

1. è continua e derivabile in $\mathbb{R}$
2. è derivabile in $\mathbb{R}$
3. è integrabile in $[-2,1]$

4. nessuna delle precedenti

9) La funzione $f(x) = \frac{1}{x}$

1. è integrabile in $[-1, 1]$
2. è integrabile in $[1, 2]$
3. ha primitiva $\log(x)$
4. nessuna delle precedenti

10) L'integrale $\int_3^4 \left(-\frac{3}{2-x}\right) dx$ vale

1. 0
2. $-3\log(2) + \log(3)$
3. $3\log(2) - \log(27)$
4. nessuna delle precedenti

11) Sia $G(x)' = f(x)$ con $G(x)$ derivabile su $\mathbb{R}$. Allora

1. $\int f(x)dx = G(b) - G(a)$
2. $\int f(x)dx = G(x)$
3. $\int f(x)dx = G(x) + c$
4. nessuna delle precedenti

11) Se $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx$ possiamo affermare che

1. $f(x) = g(x)$
2. f e g hanno la stessa primitiva
3. esiste un $x_0 \in [a, b]$ per cui $f(x_0) = g(x_0)$
4. nessuna delle precedenti

12) Se $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx$ possiamo affermare che

1. $f(x) = g(x)$
2. f e g hanno la stessa primitiva
3. esistono $x_1, x_2 \in [a, b]$ per cui $f(x_1) = g(x_2)$
4. nessuna delle precedenti