Programma particolareggiato delle lezioni svolte nel corso CLEM di Matematica Generale, lettere M-Z, nell'anno accademico 2014/2015 dal Prof. F. Manzini.

22-9 Generalità sul corso e sulle modalità di esame. Insiemi ed elementi, sottoinsiemi, unione ed intersezione , insieme differenza, complementare, insieme delle parti, partizione di un insieme, prodotto cartesiamo (cap 1 par 5.1,5.2,5.3).
Applicazioni fra insiemi, dominio e codominio, immagini e controimmagini di insiemi (cap 2 par 1), iniettivitá e suriettivitá.

23-9 Funzioni composte e funzione inversa (cap 2 par 5.1,5.2). Insiemi numerici : $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ con rispettive proprietá algebriche, relazione d'ordine $\leq$, irrazionalitá di $\sqrt{2}$ (cap 1 par 1,2,3), insiemi finiti ed insiemi numerabili, numerabilitá di $\mathbb{Z}$ (cap 1 par 8,8.2). Cenni alla non numerabilitá di (0,1).

24-9 Sistema di ascisse su una retta e topologia di $\mathbb{R}$: intervalli propri ed impropri (cap 1 par 6,6.1), intorno di un punto, intorno destro e sinistro di un punto, punti interni ed esterni di un insieme, insiemi aperti e chiusi, punti di frontiera (cap 10 par 2), punti isolati, punti di accumulazione, massimo, minimo (cap 1 par 6,6.1), maggioranti e minoranti, estremo superiore ed inferiore di un insieme.

29-9 Funzioni reali di variabile reale, iniettive e suriettive, funzioni monotone (cap 2 par 6.2), pari e dispari (cap 2 par 7). Funzioni lineari affini $f(x) = mx + q$, iniettivitá e suriettivitá, interpretazione geometrica del coefficiente angolare, intercetta di una retta (cap 2 par 3), parallelismo, retta per un punto del piano cartesiano. Funzione radice quadrata e valore assoluto (cap 2 pag 66). Funzioni fratte: $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{x(x+1)}$: studio del dominio, iniettivitá e suriettivitá.

30-9 Equazione esplicita ed implicita della retta, parallelismo , incidenza e perpendicolaritá, rette per un punto e per due punti in entrambi i casi. Definizione di polinomio generico, radice di un polinomio, polinomi di primo grado e secondo grado, radici. Caso $\Delta < 0$: numeri complessi; proprietá algebriche dei numeri complessi Cenni alla rappresentazione di Argand-Gauss ed alla formula di Eulero.

1-10 Teorema fondamentale dell'algebra, teorema di Ruffini, fattorizzazione dei polinomi in $\mathbb{C}[\mathbb{X}]$ ed in $\mathbb{R}[\mathbb{X}]$. Soluzioni delle disequazioni di primo e secondo grado. Disequazioni fratte ed irrazionali. Inizio dello studio di funzione: studio di dominio e segno delle funzioni:

$$\frac{3x-1}{1-x}, \quad \frac{1}{2x-2}+\frac{3x}{x-2}, \quad \sqrt{2x-1}-x, \quad -\sqrt{3x+1}+x$$

.

6-10 Dominio e segno di

$$\frac{1}{\sqrt{x^2+x}}, \quad \frac{1}{\sqrt{x-1}}-\frac{1}{\sqrt{x}}, \quad \sqrt{\frac{x-3}{x^2-3x+2}}, \quad \frac{x^3-x^2+x-1}{x^2-3x+2}, \\ \frac{1}{\sqrt{2x+x^2}-x}$$

Regola di Ruffini; Funzioni esponenziali e logaritmiche (cap 2 par 8.1, 8.2); dominio e segno di :

$$\log\left(x^2-3x+2\right), \quad \frac{\log(x)}{\log(x)-1}$$

7-10 Ancora dominio e segno di

$$\frac{1}{\log(x)+1}, \quad \frac{1}{\log_{\frac{1}{2}}(x)-2}, \quad e^x-e^{\frac{1}{x}}, \quad e^{\sqrt{x^2-x}}-e^{\sqrt{x}}$$

Funzioni trigonometriche: $\sin(x), \cos(x), \tan(x)$.(cap 2 par 8.3)
Dominio e segno di :

$$\sin(\log(x)), \quad \frac{\sin(x)}{\cos(x)-1}$$

8-10 Generalitá sulle successioni (cap 3 par 1.1), monotonia (cap 2 def 6.2), convergenza e divergenza (cap 3 par 1.1-1.3), successioni indeterminate (cap 3 def 1.4); successioni limitate, comportamento asintotico delle successioni monotone e geometriche (cap 3 teor 3.1,par 3.2). Esempi vari.

13-10 Teoremi sulle successioni: unicitá del limite (cap 3 par 1.5), confronto (cap 3 teor 5.1), Teorema dei due carabinieri (cap 3 teor 5.2), permanenza del segno. Limiti di somme, prodotti, quozienti di successioni (cap 3 par 5.2), limite di $a_n^{b_n}$, Tutte le 7 forme indeterminate, confronto tra successioni divergenti (cap 3 par 6.1) :

$$log^{\alpha}(n), \quad n^{\beta}, \quad a^n, \quad n!, \quad n^n \quad \forall \quad \alpha > 0, \beta > 0, a > 1$$

; alcuni limiti notevoli:

$$\lim_{n\to\infty} n \sin\left(\frac{1}{n}\right) = 1, \quad \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{k}{n}\right)^{\frac{n}{h}} = e^{\frac{k}{h}}$$

14-10 Successioni infinitesime ed infinite (cap 3 par 6.1,6.2). Esempi di successioni.
Serie numeriche : convergenza, divergenza, indeterminazione (cap 6 def 1.1,1.2);

$$\sum_{k\geq 1}\frac{1}{k(k+1)}, \quad \sum_{k\geq 1} k, \quad \sum_{k\geq 1}(-1)^k$$

Serie geometriche, calcolo della somma (cap 6 par 2). Principio di Induzione.

15-10 Cenni al criterio del confronto per serie a termini di segno costante (cap 6 teor 4.2), alla condizione necessaria di convergenza per una serie(cap 6 teor 4.1). Serie armoniche generalizzate (cap 6 esem 4.1).
Teoria dei limiti delle funzioni: definizione di limite, finito o no, di funzioni all'infinito; esempi vari.

20-10 Definizione di limite, finito o no, al finito. Teorema ponte(cap 3 par 2), esempio di funzione che non ammette limite in un punto:

$$f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right) \quad \text{in} \quad x_0 = 0.$$

Teoremi sulle operazioni tra limiti (cap 3 par 5.2); teorema del confronto (cap 3 teor 5.1), dei carabinieri (cap 3 teor 5.2)con esempi. Studio del dominio, segno e limiti di:

$$f(x) = e^x - e^{\frac{1}{x^2}}$$

Asintoti orizzontali (cap 3 pag 77). Richiami di topologia: punti di accumulazione destri e sinistri di un sottoinsieme di $\mathbb{R}$. Limite destro e sinistro , finito o no, di una funzione in un punto (cap 3 par 2.1,2.2), esempi vari.

21-10 Funzioni infinitesime ed infinite al finito ed all'infinito; confronti fra due funzioni infinitesime/infinite (cap 3 par 6). Infinitesimi ed infiniti campione al finito ed all'infinito. Ordine di infinitesimo o di infinito al finito e all'infinito. Esempio di infinitesimi non confrontabili:

$$f(x) = x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \quad \text{e} \quad g(x) = x \quad \text{in} \quad x_0 = 0.$$

Esempio di infiniti non confrontabili:

$$f(x) = 2x + x\sin(x) \quad \text{e} \quad g(x) = x \quad \text{per x} \to +\infty.$$

Calcolo del limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

con argomentazioni geometriche (cap 3 es 5.11). Calcolo dei limiti all'infinito dei polinomi e delle funzioni razionali (cap 3 esempi pag 90).

22-10 Presentazione di alcuni limiti notevoli (cap 3 teor 6.1). Continuitá di una funzione , combinazione lineare di funzione continue, prodotto, quoziente di funzioni continue é continua (cap 4 par 1,2); discontinuitá (cap 4 par 2.2 pag 99)e loro classificazione; Teorema della permanenza del segno, di Weierstrass (cap 4 teo 3.4), dei valori intermedi (cap 4 teo 3.2), degli zeri (cap 4 teo 3.1); esempi e controesempi vari.

27-10 Definizione di asintoto ed esempi (cap 3, pag 76-77, pag 91). Calcolo di alcuni limiti notevoli (cap 3 par 5.4):

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x} = \frac{1}{2}, \quad \lim_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e, \quad \lim_{x\to 0} \frac{\log(x+1)}{x} = 1,$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1, \quad \lim_{x\to 0} x^{\sin(x)} = 1$$

Definizione di derivata e sua interpretazione geometrica, equazione della retta tangente (cap 5 par 1).

28-10 Derivate destre e sinistre di una funzione in un punto (cap 5, def 1.4), funzioni non derivabili (p.ti angolosi, p.ti di cuspide e p.ti a tangente verticale), relazione tra continuitá e derivabilitá di una funzione in un punto (cap 5, par 1.1). Regole classiche di derivazione (somma, prodotto...) (cap 5, par 3,4), tabella delle derivate elementari (cap 5, par 2)ed esempi vari; derivata di $f(x)^{g(x)}$. Differenziale (cap 5, par 5)

29-10 Punti di massimo e minimo locali (cap 2, def 6.7), teorema di Fermat (cap 5, teor 7.1), crescenza e decrescenza di una funzione e segno della derivata prima (cap 5, par 9), massimi e minimi globali di una funzione (cap 2, def 6.3). Esempi svolti in aula:

$$\frac{\log(x)}{x}, \quad xe^{\frac{1}{x}}, \quad \left(x^2-8\right)e^x$$

3-11 Convessitá, concavitá di funzioni e punti di flesso, interpretazione geometrica e caratterizzazione analitica (cap 5, par 12). Esempi (gli stessi del 29-10).

4-11 Polinomio e formula di Taylor. Cenni allo sviluppo in serie di Taylor di una funzione (cap 7, par 7.2 def 7.1 e parte del teor 7.5). Esempi di polinomi di Taylor delle funzioni:

$$xe^x, \quad \sqrt{x}, \quad \sin(x), \quad \cos(x), \quad e^x, \quad \log(x+1)$$

Calcolo di alcuni limiti con l'utilizzo della formula di Taylor.

Cenni al confronto tra il grafico della funzione $\sin(x)$ ed i polinomi di Taylor di ordine 1 e 3 di essa centrati nel punto $x_0 = 0$. Vedi figura 1

5-11 Caratterizzazione dei punti estremanti e di flesso di una funzione mediante il valore delle derivate "successive" nei punti stazionari (cap 7, par 7.3 teor 7.6-7.7). Teoremi di Rolle e Lagrange con dimostrazione (cap 5, par 8), regola dell'Hospital (cap 5, par 10)ed il calcolo di alcuni limiti. Studio completo della funzione

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \forall x \geq 0 \\ x^2+2x & \forall x < 0 \end{cases}$$

10-11 Definizione di primitiva (cap 7, def 4.1), integrale indefinito (cap 7, par 5), regola di sostituzione immediata (cap 7, par 5.4). Tabella degli integrali indefiniti elementari e calcolo di alcuni integrali.
Studio della funzione:

$$x^4(x-1)^3$$

11-11 Definizione di integrale definito e funzioni integrabili (secondo Riemann) (cap 7, par 1,2), Teorema della media integrale per funzioni limitate ed integrabili e per funzioni continue (cap 7, par 3.2); esempio di funzione non integrabile (secondo Riemann) nell'intervallo $[0, 1]$

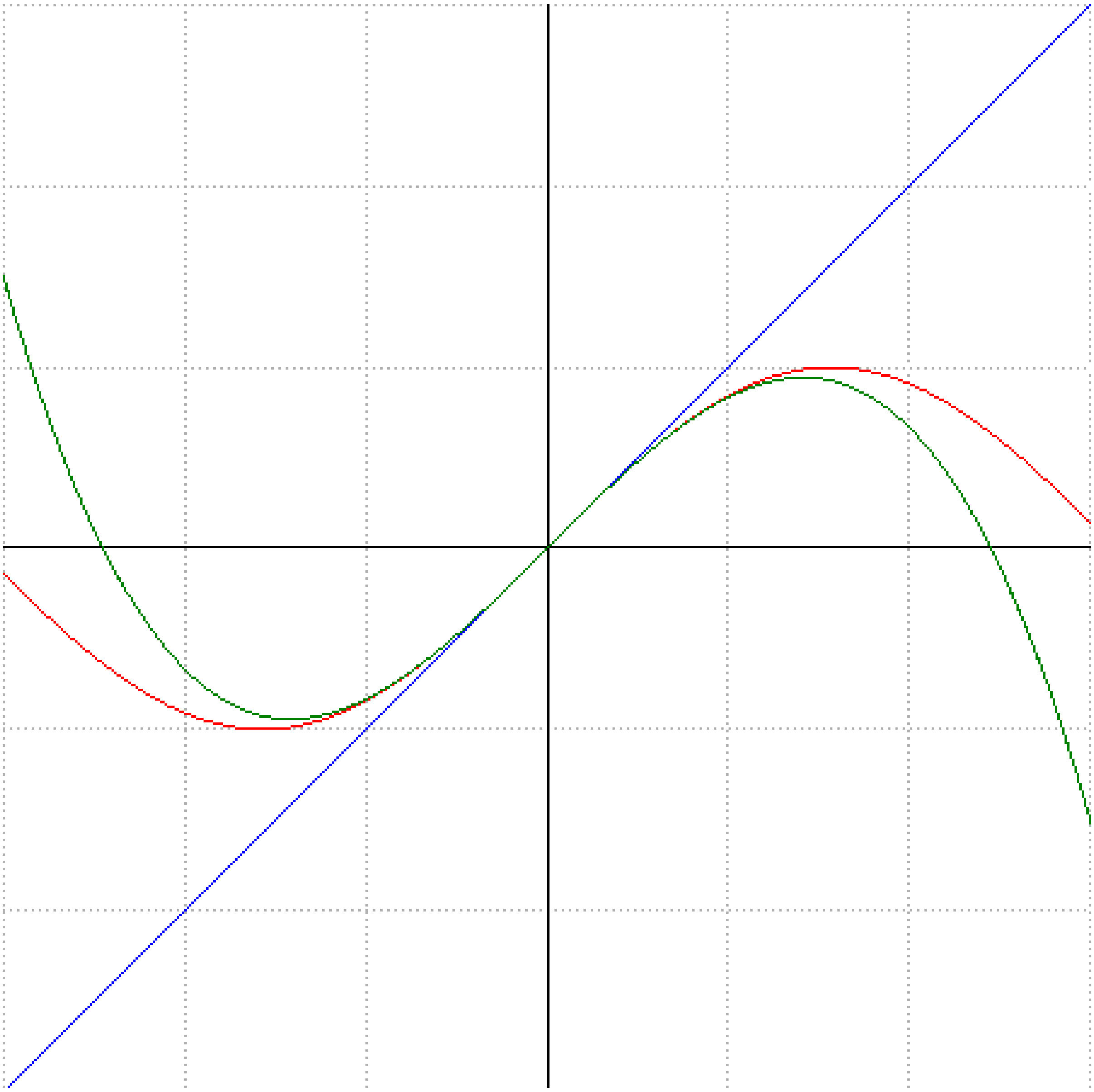

Figure 1: blu : $f(x) = x$; rossa : $f(x) = \sin(x)$; verde : $f(x) = x - \frac{x^3}{6}$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in [0,1] \cap \mathbb{Q} \\ 0 & x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

Proprietá dell'integrale definito (cap 7, par 3.1).

12-11 Teorema di Torricelli-Barrow e calcolo dell'integrale definito (cap 7, par 4), metodi di integrazione per parti e per sostituzione (cap 7, par 5.3,5.4). Esempi.

24-11 Definizione e proprietá degli spazi vettoriali, tra cui $\mathbb{R}^n$, spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ (cap 8, par 1,2), prodotto scalare, norma e distanza tra 2 punti (cap 8, par 3), sottospazi vettoriali (cap 8, par 4), vettori ortogonali, combinazioni lineari tra vettori (cap 3, par 2.1)e sottospazio generato (cap 3, microt 4.1), dipendenza ed indipendenza lineare lineare e loro proprietá. (cap 3, par 5) .Esempi vari.

25-11 Ortogonalitá ed indipendenza, Rango di insiemi di vettori, basi di spazi vettoriali, coordinate, dimensione di spazio vettoriale (cap 8, par 6), base canonica (cap 8, esem 4.1). Definizione di sistema lineare (cap 9, par 1). Matrici e loro proprietá tra cui il prodotto righe per colonne ,matrici trasposte e simmetriche, matrici diagonali, triangolari superiori ed inferiori, matrice unitaria (cap 8, par 7,8,8.2).

26-11 Determinante di una matrice quadrata, sviluppo di Laplace. Proprietá dei determinanti (cap 8, par 9,9.1), definizione e calcolo matrice inversa (cap 8, par 8.3,10), rango di una matrice (cap 8, par 11), teor. di Kronecker.

1-12 Scrittura di un sistema lineare nella forma:

$$A\overline{x} = \overline{b}$$

(cap 9, par 1,1.2) Dimensione degli spazi vettoriali generati da un insieme finito di vettori; relazioni fra rango di n vettori di $\mathbb{R}^n$, dipendenza lineare, determinante della matrice costruita con essi,; teorema di Rouché - Capelli (cap 9, par 3,3.1), teorema di Cramer ed espressione della soluzione nella forma

$$\overline{x} = A^{-1}\overline{b}$$

(cap 9, par 2). Esempi vari.

2-12 Cenni riguardo la linearitá dell'applicazione $\overline{x} \longrightarrow A\overline{x}$ (cap 9, par 6). Sistemi lineari omogenei e loro soluzioni (cap 9, par 4.1). Esercizi svolti in aula: *Studiare , al variare di* $t \in \mathbb{R}$, *le soluzioni dei sistemi lineari seguenti:*

$$\begin{cases} x + tz = 1 \\ -tx + y = 1 \\ x + y = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x - y + tz = 1 \\ 2x + ty + 4z = 5 \end{cases}$$

Matrici reali simmetriche definite positive e negative, semidefinite positive e negative, indefinite. Caratterizzazione delle matrici definite positive e negative (cap 10, par 4); esempi.

10-12 Cenni alle funzioni reali di due variabili reali: dominio, continuitá (cap 10, pag 292); definizione di massimo e minimo relativo (cap 10, pag 287)(vedi figura 2 e 3 rispettivamente); teorema di Weierstrass (cap 10, teor 5.1), derivate parziali (cap 10, par 6), differenziale primo ed equazione del piano tangente (cap 10, pag 296), punti stazionari, condizioni del primo ordine per i punti di estremo locale (cap 10, par 11, teor 11.1), formula di Taylor arrestata al differenziale di secondo ordine (cap 10, par 9,9.1,9.2), condizioni del secondo ordine per i punti interni di estremo locale (cap 10, par 11.2, teor 11.2). Punti di sella: vedi figura 4. Esempi svolti in aula: determinare massimi e minimi locali/assoluti delle funzioni $f(x, y)$ negli insiemi specificati

$$f(x,y) = xe^x + y^2 \quad in \quad \mathbb{R}^2$$
$$f(x,y) = 2x^2y - xy^2 + 2xy - y^2 \quad in \quad \mathbb{R}^2$$

11-12 Determinazione dei punti di massimo e minimo vincolati ,locali ed assoluti, tramite l'utilizzo della funzione lagrangiana (cap 10, pag 317); hessiamo orlato (cap 10, teor 12.2). Esempi svolti in aula: determinare massimi e minimi locali/assoluti delle funzioni $f(x, y)$ negli insiemi specificati

$$f(x,y) = xy \quad nell' \quad insieme \quad V = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x + 4y = 16\}$$
$$f(x,y) = x^2y + xy^3 \quad nell' \quad insieme \quad V = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 1\}$$
$$f(x,y) = xy \quad nell' \quad insieme \quad V = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$$

Testi di riferimento:

Matematica per l'economia e l'azienda. L.Peccati, S.Salsa, A.Squellati - Egea - III ed. (riferimenti in blu)

Matematica Generale. Simon, Blume - Egea 2007 (riferimenti in verde).

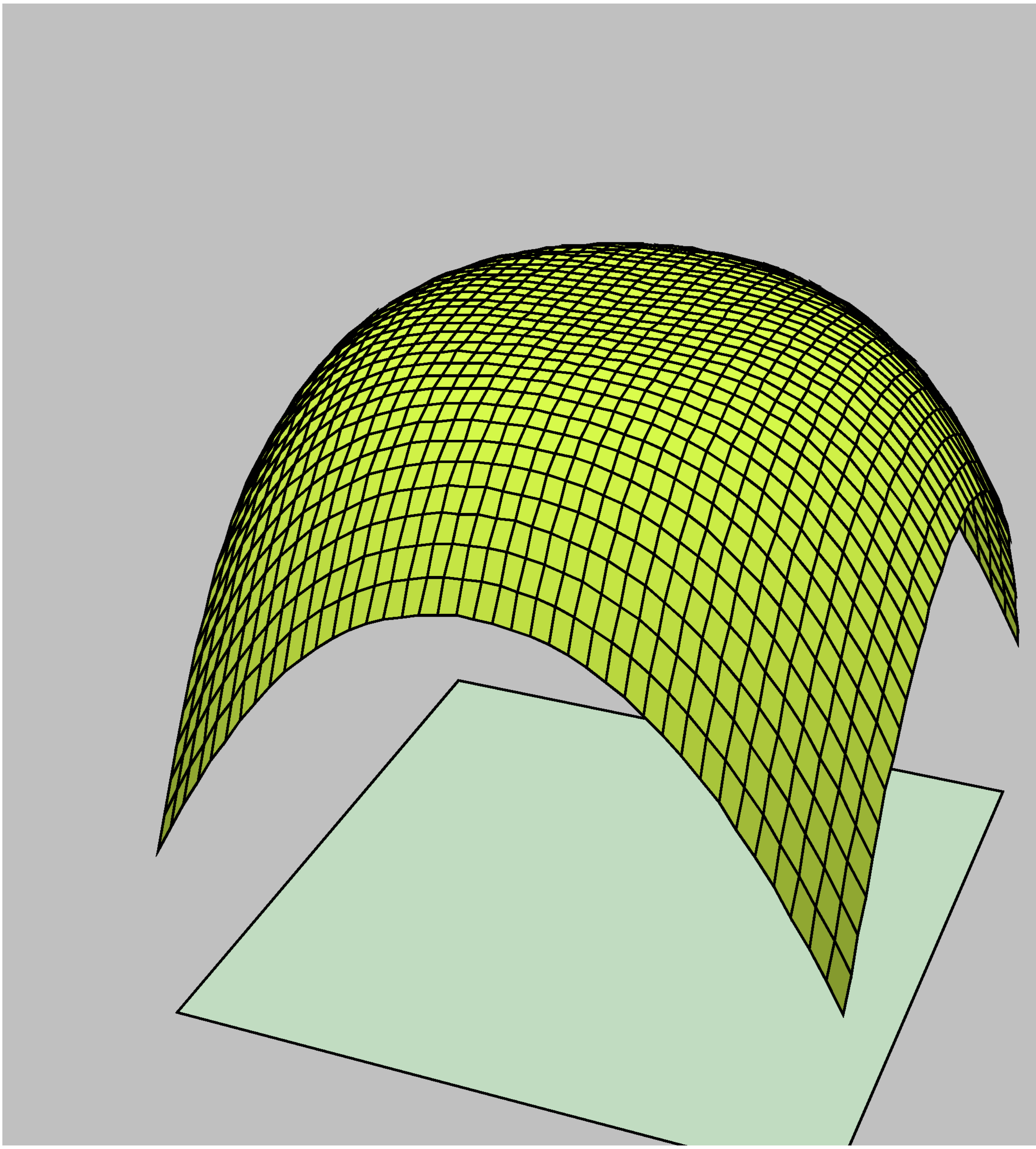

Figure 2: Superficie di equazione $z = \cos(x^2 + y^2)$ in un intorno dell'origine.

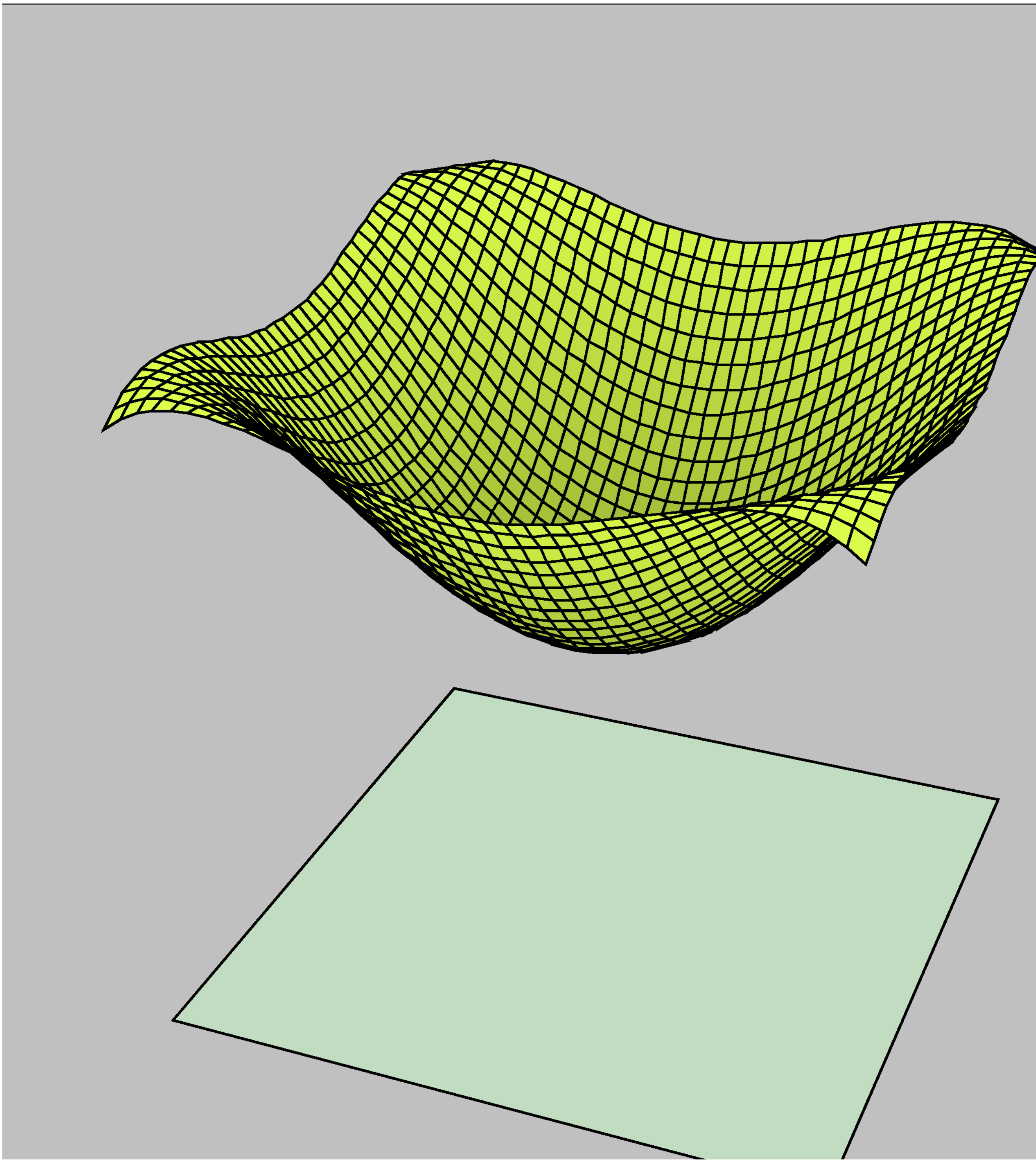

Figure 3: Superficie di equazione $z = \sin(x^2 + y^2)$ in un intorno dell'origine.

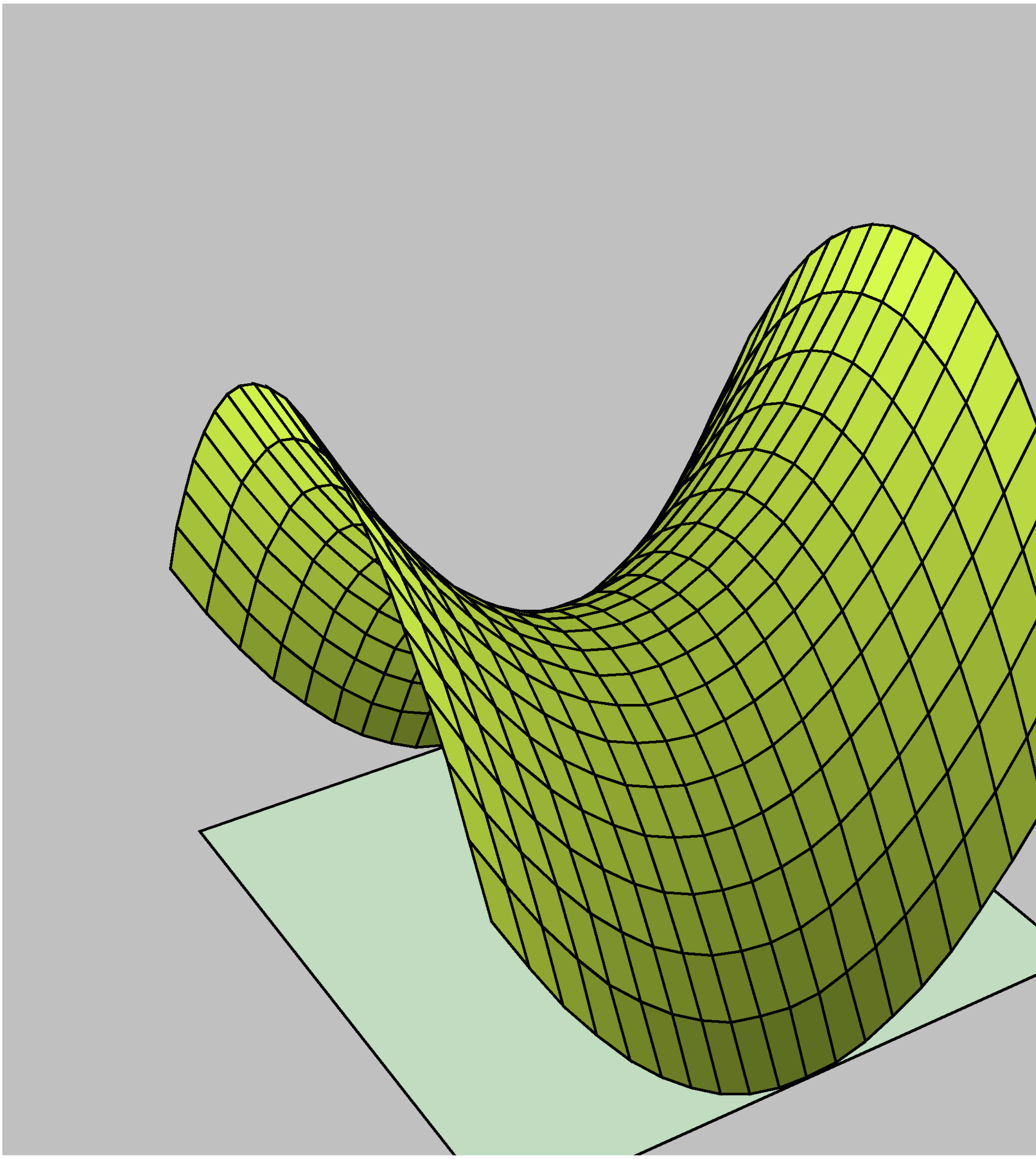

Figure 4: Superficie di equazione $z = x^2 - y^2$ in un intorno dell'origine.

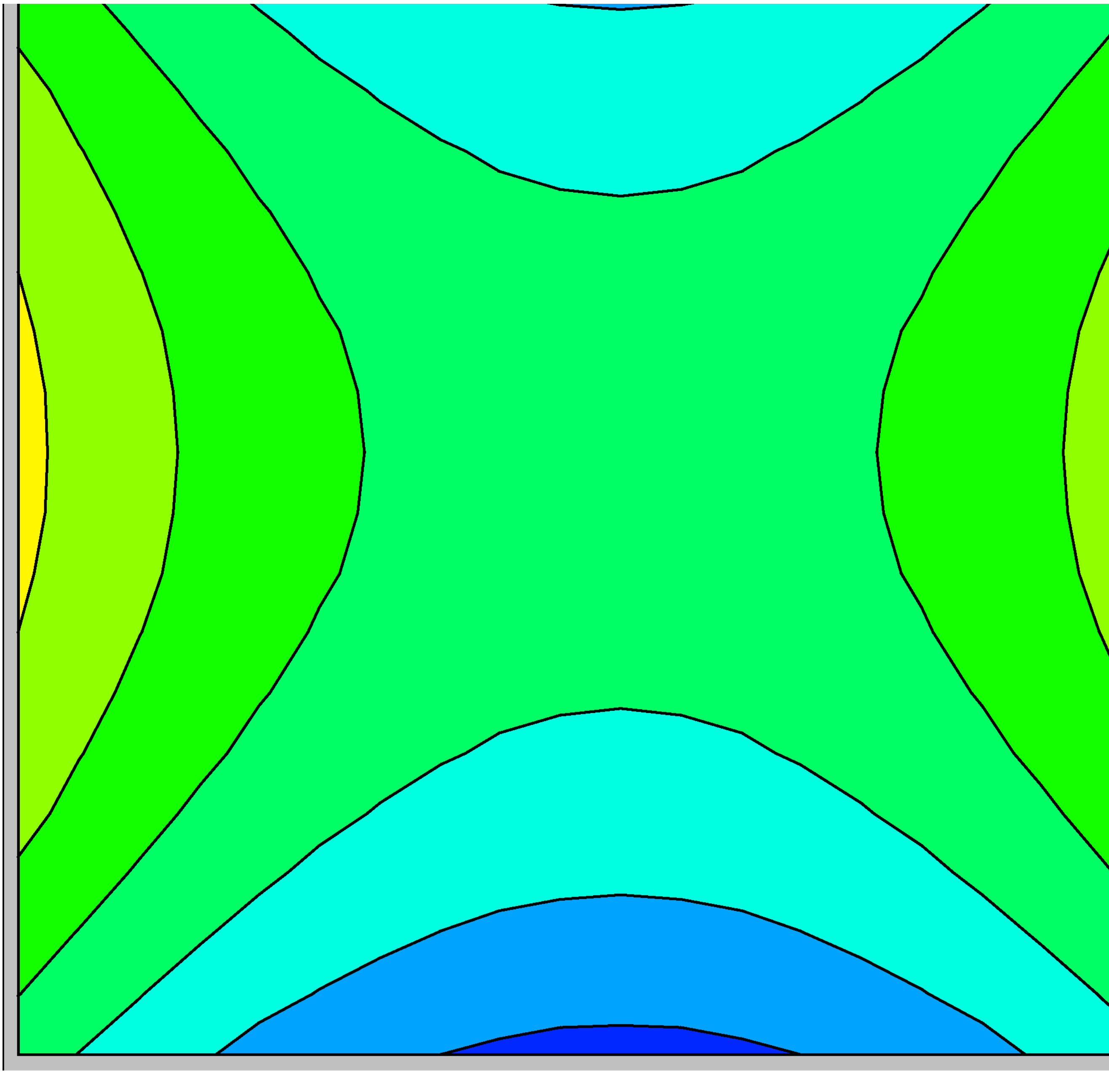

Figure 5: Curve di livello di $z = x^2 - y^2$.