Esercitazioni di Matematica Generale

Corso di laurea in Economia e Management

Serie Numeriche - Limiti di Funzioni

19 Ottobre 2017

Esercizio 1.
Per ognuna delle seguenti serie determinare la convergenza o la divergenza. In caso di convergenza, calcolare la somma.

$$\text{(i)}\ \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2^k+4^k}{8^k};\quad \text{(ii)}\ \sum_{k=0}^{+\infty} \sin^k\left(\frac{\pi}{6}\right);\quad \text{(iii)}\ \sum_{k=1}^{+\infty} k\sqrt{\frac{1}{k^2+k}}.$$

Esercizio 2.
Studiare il carattere della serie al variare di $x \in \mathbb{R}$:

$$\text{(i)}\ \sum_{k=0}^{+\infty} (\ln(x))^k \text{ con } x>0;\quad \text{(ii)}\ \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{1+x}\right)^n;\quad \text{(iii)}\ \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k+3}{k+4}(2x-1)^k \text{ con } x>\frac{1}{2}.$$

Inoltre, utilizzando il criterio del rapporto oppure il criterio del confronto, stabilire il carattere delle seguenti serie:

$$\begin{array}{llll}
\text{(i)} & \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{5^k(k^2+k+1)}{2^k(k^2-k+1)}; & \text{(ii)} & \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2\sin(k)+3\cos(k)}{k^5}; \\
\text{(iii)} & \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{\sqrt{2k}}{k-\sqrt{k}}; & \text{(iv)} & \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2+3}; \\
\text{(v)} & \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k+1}{\sqrt{2k^2+k+1}}; & \text{(vi)} & \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k^3}{e^k}; \\
\text{(vii)} & \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2^k k!}{3^k k^k}; & \text{(viii)} & \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2^k+\sin(k)}{3^k+k^2}.
\end{array}$$

Esercizio 3.
Calcolare i seguenti limiti utilizzando: proprietà dei limiti, Teorema del Confronto e limiti notevoli.

$$\begin{array}{llll}
\text{(i)} & \lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2+2x+1}{x-4}; & \text{(ii)} & \lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2}{4x^2+2x-1}; \\
\text{(iii)} & \lim_{x\to5^+} \frac{x^2-25}{x^2+x-30}; & \text{(iv)} & \lim_{x\to+\infty} -(x+1)\left(e^{\frac{1}{x+1}}-1\right); \\
\text{(v)} & \lim_{x\to0} \frac{\sin(x)-x}{\tan(x)}; & \text{(vi)} & \lim_{x\to+\infty} \frac{3\cos(x)}{x}; \\
\text{(vii)} & \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x}-\cos(x); & \text{(viii)} & \lim_{x\to0} \frac{\sin(3x)}{\sin(x)}; \\
\text{(ix)} & \lim_{x\to0} \frac{\sin(x)}{\ln(1+x)}; & \text{(x)} & \lim_{x\to+\infty} \left(1+\frac{1}{2x}\right)^x; \\
\text{(xi)} & \lim_{x\to+\infty} x^2\ln\left(1+e^{-7x}\right); & \text{(xii)} & \lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2+4x}-\sqrt{x^2+8}\right); \\
\text{(xiii)} & \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x+2}{x}\right)^{\frac{x^4+1}{x^3+5}}; & \text{(xiv)} & \lim_{x\to+\infty} \frac{3+|\sin(x)|}{x\sqrt{x}}; \\
\text{(xv)} & \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3+2x+\ln(x)}{2x^3+x}; & \text{(xvi)} & \lim_{x\to0^+} e^{-\frac{1}{x}}; \\
\text{(xvii)} & \lim_{x\to0^-} xe^{\frac{1}{x}}; & \text{(xviii)} & \lim_{x\to0} \frac{\ln(1+x^2)\sqrt{\sin(x)}}{(1-\cos(x))\sqrt{e^x-1}}; \\
\text{(xix)} & \lim_{x\to-\infty} \frac{x^{-8}}{\ln(1+e^{4x})}; & \text{(xx)} & \lim_{x\to0^+} \frac{1}{\sqrt{1-\cos(x)}}.
\end{array}$$

Esercizio 4.
Dopo aver verificato che le funzioni che segueno sono infinitesime nel punto $x_0 = 0$, determinare l'ordine di infinitesimo.

$$f(x) := x(1 - \cos(x)); \quad g(x) := \tan(x)\sqrt{\sin(x)}; \quad h(x) := \sin(x) - \tan(x).$$