MATEMATICA GENERALE
Giovedì 26 Ottobre 2016
Esercitazione

1) Per ciascuna funzione, calcolare, quando possibile, asintoti verticali e orizzontali

$$y = \frac{x^3 - x}{x^2 - 4}$$

$$y = f(x) = \log_4\left(\frac{3x}{x-1}\right)$$

$$y = f(x) = \frac{\sqrt{x^2-9}-1}{x}$$

$$y = f(x) = xe^{\frac{x-1}{x+1}}$$

$$y = f(x) = \sqrt{\frac{x^3-1}{x^2+x-2}}$$

$$y = f(x) = 3x + \sqrt{x^2-1}$$

$$y = f(x) = \frac{e^x}{e^x - 1}$$

$$y = f(x) = x\frac{2\log(x) - 3}{\log x - 2}$$

$$y = f(x) = 3x + \log\left(\frac{5x}{x-2}\right)$$

$$y = f(x) = \ln(\sqrt{2+x^2} + x)$$

$$y = f(x) = xe^{-\frac{1}{|x|}}$$

$$y = f(x) = \frac{1+\cos x}{1-\cos x}$$

$$y = f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{1+\cos x}}$$

2) Dimostrare l'esistenza di una soluzione dell'equazione $e^{-x} = \log x$.

3) Determinare se la seguente funzione è continua su $\mathbb{R}$

$$y = f(x) = \begin{cases} \frac{e^x-1}{x} - 1 & \text{se } x \in (-\infty, 0) \\ \frac{\ln(1+x)}{x^2+1} & \text{se } x \in [0, 1] \\ x^2 - 1 & \text{se } x \in (1, +\infty) \end{cases}$$

4) Determinare dove sono continue le seguenti funzioni. Classificare, nel caso ve ne siano, i punti di discontinuità

$$y = f(x) = \begin{cases} \frac{1-\cos^3 x}{x(e^x-1)} & \text{se } x < 0 \\ \log(\sqrt{x}+1) & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

$$y = f(x) = \begin{cases} \left(\frac{2}{2+x}\right)^{\frac{1}{x}} & \text{se } -2 < x < 0 \\ \frac{1}{x+e} & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

$$y = f(x) = \frac{x+3}{3x^2+x^3}$$

$$y = f(x) = \frac{\log(1+x^2)}{\sqrt{3-x}}$$

$$y = f(x) = \begin{cases} x\sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{se } x \neq 0 \\ 2 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

$$y = f(x) = \begin{cases} e^{\frac{x}{\sqrt{-1+x^2}}} & \text{se } x < -1 \\ 0 & \text{se } x = -1 \\ \frac{e^{\cos(x+1)-1}-e^{x+1}}{x+1} & \text{se } x > -1 \end{cases}$$

5) Determinare $k \in \mathbb{R}$ tale che

$$y = f(x) = \begin{cases} 2x^2+4x & \text{se } x \geq 1 \\ -x+k & \text{se } x < 1 \end{cases}$$

sia continua in $\mathbb{R}$.

6) Determinare $a, b \in \mathbb{R}$ tale che

$$y = f(x) = \begin{cases} \log(1+x) & \text{se } -1 < x \geq 0 \\ a\sin x + b\cos x & \text{se } 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ x & \text{se } x \geq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

sia continua in $\mathbb{R}$.

7) Verificare che la funzione

$$y = f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$$

è prolungabile per continuità.

8) Calcolare le derivate prime delle seguenti funzioni

$$y = f(x) = x^2 + 2x + 1$$

$$y = f(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2$$

$y = f(x) = \left(x^2 - 5\right)^{\frac{7}{2}}$

$y = f(x) = \sqrt{1 - x^3}$

$y = f(x) = \sqrt[3]{3x^3 - 7}$

$y = f(x) = (\sqrt{x} - 1)^2 - \left(x^2 + 1\right)^4$

$y = f(x) = \frac{2x-1}{x+3}$

$y = f(x) = x^2 e^{x^2}$

$y = f(x) = \frac{e^x}{x^3}$

$y = f(x) = x \ln(x)$

$y = f(x) = \frac{x^2}{\ln(x)}$

$y = f(x) = \frac{x^2+3x-7}{x^2+x^4+1}$

$y = f(x) = 3 \sin\left(\frac{3}{2}x^2 + 2\right)$

$y = f(x) = 3x^2 \cos(2x + 7)$

$y = f(x) = \sin\left(\frac{x-2}{2x+3}\right) \cos\left(2x^3\right)$

9) Determinare α e β affinchè la seguente funzione sia continua e derivabile

$$y = f(x) = \begin{cases} (x - \beta)^2 - 2 & \text{se } x \geq 0 \\ \alpha \sin x & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

10) Verificare che le funzioni

$$\text{a)}\ \ f(x) = x^2 \log|x| \qquad \text{b)}\ \ f(x) = x^x$$

sono prolungabili per continuità per $x = 0$. Le funzioni così prolungate sono derivabili in $x = 0$?