Esercitazioni di Matematica Generale

Corso di laurea in Economia e Management

Esercizi Preliminari

21 Settembre 2017

Esercizio 1.
Risolvere le seguenti equazioni e disequazioni intere:

(i)	$3x + 4 - x + 1 = x - 6;$	(ii)	$x + 7 + 2x \leq 7 - x;$
(iii)	$(x-2)(x+2) + (x+1)^2 - 1 = 0;$	(iv)	$(x+2)^2 \leq (x-2)^2;$
(v)	$(x+1)^2 + (x-1)^2 = 0;$	(vi)	$x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0;$
(vii)	$x^4 - 2x^2 - 8 = 0;$	(viii)	$x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0;$
(ix)	$x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1 = 0;$	(x)	$\frac{x-1}{2} + \frac{x+2}{3} < \frac{5x+1}{6}.$

Soluzione.

(i) Portando i monomi di grado 1 al primo membro e quelli di grado 0 al secondo, otteniamo

$$3x + 4 - x + 1 = x - 6, \quad \Longrightarrow \quad 3x - x - x = -6 - 1 - 4, \quad \Longrightarrow \quad x = -11.$$

(ii) Portando i monomi di grado 1 al primo membro e quelli di grado 0 al secondo, otteniamo

$$x + 7 + 2x \leq 7 - x, \quad \Longrightarrow \quad x + 2x + x \leq 7 - 7, \quad \Longrightarrow \quad 4x \leq 0, \quad \Longrightarrow \quad x \leq 0.$$

(iii) Svolgendo il prodotto dei due binomi ed il quadrato del binomio al primo membro, cioè

$$(x-2)(x+2) + (x+1)^2 - 1 = 0, \quad \Longrightarrow \quad x^2 - 4 + x^2 + 2x + 1 - 1 = 0,$$

otteniamo la seguente equazione di secondo grado

$$2x^2 + 2x - 4 = 0, \text{ che ha le seguenti radici reali } x = -2, \ x = 1;$$

(iv) Svolgendo i quadrati e semplificando, otteniamo

$$(x+2)^2 \leq (x-2)^2, \quad \Longrightarrow \quad x^2+4x+4 \leq x^2-4x+4, \quad \Longrightarrow \quad 8x \leq 0, \quad \Longrightarrow \quad x \leq 0.$$

(v) svolgendo i quadrati,

$$(x+1)^2 + (x-1)^2 = 0, \quad \Longrightarrow \quad x^2 + 2x + 1 + x^2 - 2x + 1 = 0,$$

da cui otteniamo la seguente equazioni di secondo grado $2x^2 + 2 = 0$. È chiaro che l'equazioni non ha soluzioni reali.

(vi) Attraverso un raccoglimento parziale, otteniamo

$$x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0, \quad \Longrightarrow \quad x^2(x-2) - (x-2) = 0, \quad \Longrightarrow \quad (x-2)(x^2-1) = 0,$$
$$(x-2)(x-1)(x+1) = 0.$$

Quindi abbiamo tre radici date da $x = -1$, $x = 1$ e $x = 2$.

(vii) Per risolvere l'equazione $x^4 - 2x^2 - 8 = 0$, facciamo la seguente sostituzione

$$t = x^2, \quad \Longrightarrow \quad t^2 - 2t - 8 = 0, \quad \Longrightarrow \quad t = -2,\ t = 4.$$

Ne segue che $x^2 = -2$ non ha soluzioni reali, mentre

$$x^2 = 4, \quad \Longrightarrow \quad x = -2,\ x = 2.$$

(viii) Per risolvere l'equazione $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0$, occorre scomporre il polinomio $x^3 - 2x^2 - 5x + 6$, utilizzano l'algoritmo di Ruffini. Si ricercano le possibili radici **razionali** come fattori del termine noto. Dato che il termine noto è 6, le possibili radici sono ± 1,± 2, ± 3. Si verifica facilmente che il polinomio si annulla per $x = 1$, ed appliccando l'algoritmo di Ruffini otteniamo che

$$x^3-2x^2-5x+6 = 0, \quad \Longrightarrow \quad (x-1)(x^2-x-6) = 0, \quad \Longrightarrow \quad (x-1)(x+2)(x-3) = 0;$$

quindi, le radici dell'equazione sono $x = -2$, $x = 1$ ed $x = 3$.

(ix) Per risolvere l'equazione $x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1 = 0$, occorre scomporre il polinomio $x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1$, utilizzano l'algoritmo di Ruffini. Dato che il termine noto è 1, le possibili radici sono ± 1. Si verifica facilmente che il polinomio si annulla per $x = 1$, ed appliccando l'algoritmo di Ruffini due volte otteniamo che

$$x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1 = 0, \quad \Longrightarrow \quad (x-1)^2(x^2+1) = 0.$$

L'unica radice dell'equazione è $x = 1$.

(x) La disequazione non ha soluzione; infatti

$$\frac{x-1}{2} + \frac{x+2}{3} < \frac{5x+1}{6}, \quad \Longrightarrow \quad \frac{3x-3+2x+4}{6} < \frac{5x+1}{6}, \quad \Longrightarrow \quad 1 < 1.$$

Esercizio 2.
Risolvere le seguenti equazioni e disequazioni fratte:

(i)	$\frac{x-1}{2} > \frac{x^2-x}{x}$;	(ii)	$\frac{3x^2+7x+4}{x^4-2x^2-3} > 0$;
(iii)	$\frac{x-3}{3x} + \frac{x}{6} \leq \frac{x^2+9}{6x} - \frac{x+3}{x}$;	(iv)	$\frac{6+(3-x)^2}{x+2} - 1 \geq \frac{2-x^2}{-x-2}$;
(v)	$\frac{2x-1}{x-3} < \frac{x+1}{x-1}$;	(vi)	$\frac{7x-4}{x^2-4} - \frac{2}{x-2} < \frac{7}{x+2}$;
(vii)	$\frac{x}{x-1} + \frac{3-x}{1-x^2} = 0$;	(viii)	$\frac{2x}{x^2-9} + \frac{1}{3-x} > \frac{2-x}{x^2+6x+9}$.

Soluzione.

(i) Calcolando il m.c.m. e portando tutti i termini al primo membro, otteniamo

$$\frac{x-1}{2} > \frac{x^2-x}{x}, \implies \frac{x^2-x}{2x} > \frac{2x^2-2x}{2x}, \implies \frac{x-x^2}{2x} > 0.$$

Siccome il numeratore è positivo per $x \in (0,1)$ e il denominatore lo è per $x > 0$, abbiamo che la disequazione (i) è verificata per $x \in (-\infty, 0) \cup (0,1)$.

(ii) Il numeratore di (ii) è positivo per $x \in (-\infty, -\frac{4}{3}) \cup (-1, +\infty)$. Con la sostituzione $y = x^2$, è facile verificare che l'equazione $x^4 - 2x^2 - 3 = 0$ ha solo due soluzioni reali che sono $x = \pm\sqrt{3}$ e di conseguenza, il denominatore di (ii) è positivo per $x \in (-\infty, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$. In definitiva, la disequazione è verificata per $x \in (-\infty, -\sqrt{3}) \cup (-\frac{4}{3}, -1) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$.

(iii) Calcolando il m.c.m, otteniamo

$$\frac{x-3}{3x} + \frac{x}{6} \leq \frac{x^2+9}{6x} - \frac{x+3}{x}, \implies \frac{2x-6+x^2}{6x} \leq \frac{x^2+9-6x-18}{6x},$$

e portando tutti i termini al primo membro, abbiamo

$$\frac{8x+3}{6x} \leq 0.$$

E' facile vericare che la disequazione è verificata per $x \in [-\frac{3}{8}, 0)$.

(iv) Calcolando il m.c.m, otteniamo

$$\frac{6+(3-x)^2}{x+2} - 1 \geq \frac{2-x^2}{-x-2}, \implies \frac{6+9-6x+x^2-x-2}{x+2} \geq \frac{x^2-2}{x+2},$$

e portando tutti i termini al primo membro, abbiamo

$$\frac{-7x+15}{x+2} \geq 0.$$

E' facile vericare che la disequazione è verificata per $x \in (-2, \frac{15}{7}]$.

(v) Calcolando il m.c.m, otteniamo

$$\frac{2x-1}{x-3} < \frac{x+1}{x-1}, \implies \frac{2x^2-2x-x+1}{(x-3)(x-1)} < \frac{x^2-3x+x-3-2}{(x-3)(x-1)},$$

e portando tutti i termini al primo membro, abbiamo

$$\frac{x^2-x+4}{(x-3)(x-1)} < 0.$$

Osserviamo che il numeratore è sempre negativo (l'equazione $x^2 - x + 4 = 0$ non ha soluzioni reali), mentre il denominatore è negativo per $x \in (1,3)$. In definitiva, la disequazione è verificata per $x \in (1,3)$.

(vi) Calcolando il m.c.m, otteniamo

$$\frac{7x-4}{x^2-4}-\frac{2}{x-2}<\frac{7}{x+2}, \implies \frac{7x-4-2(x+2)}{x^2-4}<\frac{7(x-2)}{x^2-4}.$$

Con le varie semplificazioni e portando tutti i termini al primo membro, abbiamo

$$\frac{6-2x}{x^2-4}<0.$$

Osserviamo che il numeratore è negativo per $x>3$, mentre il denominatore è negativo per $x\in(-2,2)$.
In definitiva, la disequazione è verificata per $x\in\ (-2,2)\cup\ (3,+\infty)$.

(vii) Calcolando il m.c.m, otteniamo

$$\frac{x}{x-1}+\frac{3-x}{1-x^2}=0, \implies \frac{-x(1+x)+3-x}{1-x^2}=0.$$

Con le varie semplificazioni, abbiamo

$$\frac{-x^2-2x+3}{1-x^2}=0$$

Per $x\neq\pm1$, abbiamo che l'equazione ha soluzione se e solo se $-x^2-2x+3=0$. Le uniche radici del polinomio sono $x=1$ (che non è accettabile) e $x=-3$. Di conseguena, l'equazione (vii) ha un'unica soluzione data da $x=-3$.

(viii) Calcolando il m.c.m, otteniamo

$$\frac{2x}{x^2-9}+\frac{1}{3-x}>\frac{2-x}{x^2+6x+9}, \implies \frac{2x(x+3)-(x+3)^2}{(x+3)^2(x-3)}>\frac{(2-x)(x-3)}{(x+3)^2(x-3)}.$$

Con le varie semplificazioni e portando tutti i termini al primo membro, abbiamo

$$\frac{2x^2-5x+3}{(x+3)^2(x-3)}>0.$$

Osserviamo che il numeratore è positivo per $x\in(-\infty,1)\cup(\frac{3}{2},+\infty)$, mentre il denominatore è positivo per $x\in(-\infty,-3)\cup(3,+\infty)$. In definitiva, la disequazione è verificata per $x\in\ (-\infty,-3)\cup\ (1,\frac{3}{2})\cup(3,+\infty)$.

Esercizio 3.
Risolvere i seguenti sistemi di disequazioni:

$$\text{(i)}\ \begin{cases} x+2>5 \\ x-5>0 \end{cases};\quad \text{(ii)}\ \begin{cases} \frac{x^2+1}{x}>0 \\ \frac{3}{1-x}>0 \end{cases};\quad \text{(iii)}\ \begin{cases} \frac{3x+7}{x+1}-\frac{3x-7}{x-1}<0 \\ 3(x-1)^2\leq 25-x \end{cases}.$$

Soluzione.

(i) Il sistema è equaivalente a

$$\begin{cases} x>3 \\ x>5 \end{cases},$$

che ha soluzione quando $x>5$.

(ii) La prima disequazione del sistema è verificata quando $x > 0$; mentre la seconda quando $x < 1$. Ne consegue che il sistema è compatibile quando $x \in (0, 1)$.

(iii) Analizziamo la prima disequazione:

$$\frac{3x+7}{x+1} - \frac{3x-7}{x-1} < 0, \quad \Longrightarrow \quad \frac{(3x+7)(x-1) - (3x-7)(x+1)}{(x+1)(x-1)} < 0.$$

Svolgendo i prodotti e semplificando, otteniamo

$$\frac{8x}{(x+1)(x-1)} < 0, \text{ che è verificata quando } x < -1 \text{ e } x \in (0, 1).$$

La seconda disequazione, si riduce a $3x^2 - 5x - 22 \leq 0$ che è compatibile quando $x \in [-2, \frac{11}{3}]$. In definitiva, il sistema è verificato quando $x \in [-2, -1) \cup (0, 1)$.

Esercizio 4.
Eseguire le seguenti divisioni fra polinomi:

$$\text{(i) } P(x) = 4x^3 + x + 1, \ Q(x) = 2x + 3; \quad \text{(ii) } P(x) = 2x^3 + x + 1, \ Q(x) = 2x - 1;$$
$$\text{(iii) } P(x) = 3x^3 + x^2 - 5x + 2, \ Q(x) = 3x + 2.$$

Soluzione.
Utilizzando l'algoritmo di divisione euclidea in ciascuno dei casi, otteniamo:

(i)
$$4x^3 + x + 1 = (2x+3)(2x^2 - 3x + 5) - 14;$$

infatti

$$
\begin{array}{rrrr|rrr}
+4x^3 & & +x & +1 & +2x & +3 & \\ \cline{5-7}
-4x^3 & -6x^2 & & & +2x^2 & -3x & +5 \\ \cline{1-2}
 & -6x^2 & +x & & & & \\
 & +6x^2 & +9x & & & & \\ \cline{2-3}
 & & 10x & +1 & & & \\
 & & -10x & -15 & & & \\ \cline{3-4}
 & & & -14 & & &
\end{array}
$$

(ii)
$$2x^3 + x + 1 = (2x-1)\left(x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}\right) + \frac{7}{4};$$

infatti

$$
\begin{array}{rrrr|rrr}
+2x^3 & & +x & +1 & +2x & -1 & \\ \cline{5-7}
-2x^3 & +x^2 & & & x^2 & +\frac{1}{2}x & +\frac{3}{4} \\ \cline{1-2}
 & +x^2 & +x & & & & \\
 & -x^2 & +\frac{1}{2}x & & & & \\ \cline{2-3}
 & & +\frac{3}{2}x & +1 & & & \\
 & & -\frac{3}{2}x & +\frac{3}{4} & & & \\ \cline{3-4}
 & & & +\frac{7}{4} & & &
\end{array}
$$

(iii)

$$3x^3 + x^2 - 5x + 2 = (3x+2)\left(x^2 - \frac{1}{3}x - \frac{13}{9}\right) + \frac{44}{9};$$

infatti

$$\begin{array}{rrrr|rrr}
+3x^3 & +x^2 & -5x & +2 & +3x & +2 & \\ \cline{5-7}
-3x^3 & -2x^2 & & & x^2 & -\frac{1}{3}x & -\frac{13}{9} \\ \cline{1-2}
& -x^2 & -5x & & & & \\
& +x^2 & +\frac{2}{3}x & & & & \\ \cline{2-3}
& & -\frac{13}{3}x & +2 & & & \\
& & +\frac{13}{3}x & +\frac{26}{9} & & & \\ \cline{3-4}
& & & +\frac{44}{9} & & &
\end{array}$$