Esercitazioni di Matematica Generale

Corso di laurea in Economia e Management

Insiemi di $\mathbb{R}$ - Funzioni Reali di Variabile Reale - Geometria Analitica

28 Settembre 2017

Esercizio 1.
Stabilire se i seguenti insiemi sono aperti o chiusi oppure né aperti né chiusi:

(i) $\{x \in \mathbb{R} \,|\, 1 < |x-2| < 3\}$; (ii) $\{x \in \mathbb{R} \,|\, x = \frac{1}{n},\, n \in \mathbb{N}^+\}$;

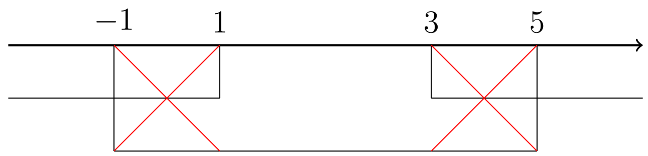
(iii) $\{x \in \mathbb{R} \,|\, x = \frac{n-1}{n},\, n \in \mathbb{N}^+\} \cup [0,1]$; (iv) $\{x \in \mathbb{R} \,|\, (x-2)^2 \neq 0\}$.

Soluzione.

(i) Decomponendo l'insieme come intersezione di due insiemi, abbiamo

$$\begin{aligned}\{x \in \mathbb{R} \,|\, 1 < |x-2| < 3\} &= \{x \in \mathbb{R} \,|\, |x-2| < 3\} \cap \{x \in \mathbb{R} \,|\, |x-2| > 1\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \,|\, -3 < x-2 < 3\} \cap \{x \in \mathbb{R} \,|\, x-2 > 1 \vee 2-x > 2\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \,|\, -1 < x < 5\} \cap \{x \in \mathbb{R} \,|\, x > 3 \vee x < 1\}.\end{aligned}$$

Come è possibile notare nella seguente rappresentazione,



l'intersezione dei due insiemi, porta alla conclusione che il nostro insieme è l'unione di due intervalli aperti; cioè

$$\{x \in \mathbb{R} \,|\, 1 < |x-2| < 3\} = (-1,1) \cup (3,5).$$

Siccome, in generale, l'unione finita di intervalli aperti è un aperto, ne consegue che il nostro insieme è aperto.

(ii) Dato che

$$\{x \in \mathbb{R} \,|\, x = \frac{1}{n},\, n \in \mathbb{N}^+\} = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots\right\},$$

notiamo che l'insieme non contiene l'estremo sinistro (cioè 0) ma contiene l'estremo destro 1. Ne consegue che l'insieme non è né aperto, né chiuso.

(iii) L'insieme è chiuso, perché

$$\{x \in \mathbb{R} \,|\, x = \frac{n-1}{n},\, n \in \mathbb{N}^+\} \cup [0,1] = \left\{0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots\right\} \cup [0,1] = [0,1].$$

(iv) Dato che

$$\{x \in \mathbb{R} \,|\, (x-2)^2 \neq 0\} = (-\infty, 2) \cup (2, +\infty),$$

l'insieme è aperto per lo stesso motivo del punto (i).

Esercizio 2.
Stabilire se i seguenti insiemi sono limitati o non limitati in $\mathbb{R}$, e determinarne, ove possibile, inf, sup, max o min in $\mathbb{R}$:

(i) $\{x \in \mathbb{R} \,|\, x = \frac{n-(-1)^n}{n+1},\, n \in \mathbb{N}^+\}$; (ii) $\{x \in \mathbb{R} \,|\, x = \frac{2}{n} - 1,\, n \in \mathbb{N}^+\} \cup [1, 2]$;
(iii) $\{x \in \mathbb{R} \,|\, x = 2^n,\, n \in \mathbb{N}\} \cup [0, 1]$; (iv) $[-2, 5) \cup \{\frac{13}{2}, 9\}$.

Inoltre, determinare l'insieme derivato e gli eventuali punti isolati, interni e di frontiera per ciascun insieme.

Soluzione.

(i) Indicando con A l'insieme e decomponendo lo come unione di due insiemi, come segue

$$\begin{aligned} A &= \left\{x \in \mathbb{R} \,|\, x = \frac{n-(-1)^n}{n+1},\, n \text{ pari}\right\} \cup \left\{x \in \mathbb{R} \,|\, x = \frac{n-(-1)^n}{n+1},\, n \text{ dispari}\right\} \\ &= \left\{\frac{1}{3}, \frac{3}{5}, \frac{5}{7}, \frac{7}{9}, \dots\right\} \cup \{1\}, \end{aligned}$$

possiamo immediatamente stabilire che l'insieme è limitato perchè costituito da quasi tutti punti isolati e di conseguenza, abbiamo che l'estremo inferiore (che è anche minimo) è $\frac{1}{3}$ e l'estremo superiore (che è anche massimo) è 1. L'unico punto di accomulazione è il punto $\{1\}$. Non ci sono punti interni e la frontiera è l'insieme stesso.

(ii) Dato che

$$\left\{x \in \mathbb{R} \,|\, x = \frac{2}{n} - 1,\, n \in \mathbb{N}^+\right\} \cup [1, 2] = \left\{1, 0, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{5}, -\frac{2}{3}, \dots\right\} \cup [1, 2],$$

l'insieme è limitato, l'estremo inferiore è -1 (ma non è minimo) e l'estremo superiore è 2 (che è anche massimo). I punti isolati sono $\{0, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{5}, -\frac{2}{3}, \dots\}$, i punti di accomulazione sono tutti i punti nell'insieme $[1, 2]$, e i punti interni sono i punti nell'intervallo $(1, 2)$. La frontiera è determinata da $\{2, 1, 0, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{5}, -\frac{2}{3}, \dots\}$.

(iii) Dato che

$$\{x \in \mathbb{R} \,|\, x = 2^n,\, n \in \mathbb{N}\} \cup [0, 1] = \{1, 2, 4, 8, 16, \dots\} \cup [0, 1],$$

l'insieme è limitato solo inferiormente; di conseguenza, l'estremo inferiore (che è anche minimo) è 0, mentre l'estremo superiore è $+\infty$. I punti isolati sono tutti i punti in $\{2, 4, 8, 16, \dots\}$, i punti di accomulazione sono i punti in $[0, 1]$ e i punti interni sono i punti in $(0, 1)$. La frontiera è data da $\{0, 1, 2, 4, 8, \dots\}$.

(iv) L'insieme è limitato; di conseguenza l'estremo inferiore (che è anche minimo) è -2, mentre l'estremo superiore (che è anche massimo) è 9. I punti isolati sono tutti i punti in $\{\frac{13}{2}, 9\}$, i punti di accomulazione sono i punti in $[-2, 5]$ e i punti interni sono i punti in $(-2, 5)$. La frontiera è data da $\{-2, 5, \frac{13}{2}, 9\}$.

Esercizio 3.
Per ciascuna delle seguenti funzioni, stabilire se le funzioni sono pari, dispari oppure né pari né dispari. Inoltre stabilire, il dominio, il segno e le intersezioni con gli assi:

(i) $f(x) := \frac{1}{x^2-1}$; (ii) $f(x) := \frac{x^3}{|x|+1}$;

(iii) $f(x) := \frac{2x+1}{x-1}$; (iv) $f(x) := x^4 - x^2$;

(v) $f(x) := \frac{x^4-1}{x^3+x^2-10x+8}$;

Soluzione.

(i) La funzione $f(x)$ è definita in tutto $\mathbb{R}$ escluso i punti che annullano il polinomio $x^2 - 1$; cioè è definita in $\mathbb{R}\backslash\{\pm 1\}$. La funzione è pari; infatti

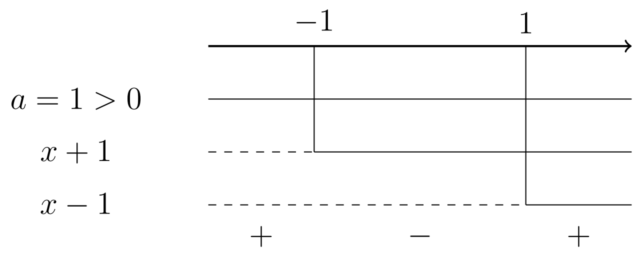
$$f(-x) = \frac{1}{(-x)^2 - 1} = \frac{1}{x^2 - 1} = f(x).$$

L'unico punto di intersezione è dato dal punto $(0, -1)$, dato come soluzione del sistema

$$\begin{cases} f(x) = \frac{1}{x^2-1} \\ x = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} f(0) = \frac{1}{0-1} = -1 \\ x = 0 \end{cases} .$$

Per studiare il segno, occorre studiare la disequazione $f(x) > 0$. Il numeratore è sempre positivo $(1 > 0)$ mentre il denominatore è positivo per x appartenente all'insieme $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$, perché

$$x^2 - 1 > 0 \Longleftrightarrow (x-1)(x+1) > 0 \Longleftrightarrow x > -1 \wedge x > 1, \text{ oppure } x < -1 \wedge x < 1$$



Ne consegue che la funzione è positiva in $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$.

(ii) Dalle proprietà della funzione modulo, abbiamo che

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^3}{x+1} & x > 0 \\ \frac{x^3}{1-x} & x < 0 \end{cases} .$$

La funzione $\frac{x^3}{x+1}$, ristretta all'intervallo $(0, +\infty)$, è sempre definita, ed analogamente la funzione $\frac{x^3}{1-x}$, ristretta all'intervallo $(-\infty, 0)$; di conseguenza, la funzione $f(x)$ è definita su tutto $\mathbb{R}$. La funzione è dispari; infatti

$$f(-x) = \frac{-x^3}{|-x|+1} = -\frac{x^3}{|x|+1} = -f(x).$$

L'unico punto di intersezione è dato dal punto $(0,0)$, dato come soluzione del sistema

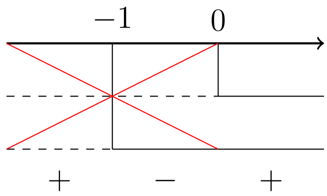
$$\begin{cases} f(x) = \frac{x^3}{|x|+1} \\ x = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} f(0) = \frac{0}{0+1} = 0 \\ x = 0 \end{cases} .$$

Per studiare il segno, occorre studiare la disequazione $f(x) > 0$. Nell'intervallo $(0, +\infty)$,

$$f(x) = \frac{x^3}{x+1},$$

e, abbiamo che

- $x^3 > 0$ quando $x > 0$,
- $x + 1 > 0$ quando $x > -1$.

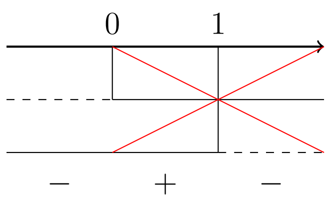


Di conseguenza, nell'intervallo $(0, +\infty)$, la funzione $f(x)$ è positiva.
Nell'intervallo $(-\infty, 0)$,

$$f(x) = \frac{x^3}{1-x},$$

e, abbiamo che

- $x^3 > 0$ quando $x > 0$,
- $1 - x > 0$ quando $x < 1$.



Di conseguenza, nell'intervallo $(-\infty, 0)$, la funzione $f(x)$ è negativa.

(iii) La funzione è definita su tutto $\mathbb{R}$ escluso il punto 1, perché il denominatore si annulla in quel punto. La funzione non è né pari né dispari:

$$f(-x) = \frac{-2x+1}{-x-1} \neq f(x) \text{ e } f(-x) \neq -f(x).$$

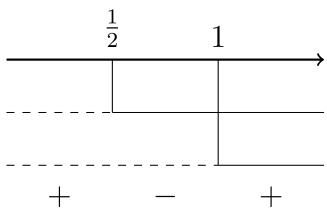
La funzione interseca l'asse delle ordinate nel punto $(0, -1)$, perché

$$\begin{cases} f(x) = \frac{2x+1}{x-1} \\ x = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} f(0) = \frac{0+1}{0-1} = -1 \\ x = 0 \end{cases},$$

mentre interseca l'asse delle ascisse nel punto $(-\frac{1}{2}, 0)$, perché

$$\begin{cases} f(x) = \frac{2x+1}{x-1} \\ f(x) = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ f(x) = 0 \end{cases}.$$

Per studiare il segno, occorre studiare la disequazione $f(x) > 0$. Il numeratore è positivo quando $x > -\frac{1}{2}$, mentre il denominatore è positivo per $x > 1$. Quindi, come possiamo notare, la funzione è positiva in $(-\infty, -\frac{1}{2}) \cup (1, +\infty)$.



(iv) La funzione è di tipo intero, quindi è definita su tutto $\mathbb{R}$. E' una funzione pari, perché

$$f(-x) = (-x)^4 - (-x)^2 = x^4 - x^2 = f(x).$$

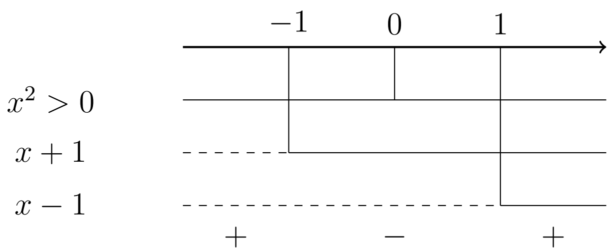
La funzione interseca l'asso delle ordinate nell'origine; infatti

$$\begin{cases} f(x) = x^4 - x^2 \\ x = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} f(0) = 0 \\ x = 0 \end{cases},$$

mentre interseca l'asso delle ascisse nei punti $(-1, 0)$, $(0, 0)$ e $(1, 0)$, infatti

$$\begin{cases} f(x) = x^4 - x^2 \\ f(x) = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x^2(x^2 - 1) = 0 \\ f(x) = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = -1, x = 0, x = 1 \\ f(x) = 0 \end{cases}.$$

La funzione è positiva in $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$; infatti,



(v) La funzione è definita su tutto $\mathbb{R}$, tranne per nei punti in cui $x^3 + x^2 - 10x + 8 = 0$. Applicando la regola di Ruffini, otteniamo che

$$x^3 + x^2 - 10x + 8 = (x + 4)(x - 1)(x - 2),$$

di conseguenza il dominio della funzione è $\mathbb{R} \backslash \{-4, 1, 1\}$. La funzione non è né pari né dispari, perché

$$f(-x) = \frac{(-x)^4 - 1}{(-x)^3 + (-x)^2 + 10x + 8} \neq f(x) \text{ e } f(-x) \neq -f(x).$$

La funzione interseca l'asse delle ordinate nel punto $(0, -\frac{1}{8})$; infatti,

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x^4-1}{x^3+x^2-10x+8} \\ x = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} f(0) = \frac{0-1}{0+8} = -\frac{1}{8} \\ x = 0 \end{cases},$$

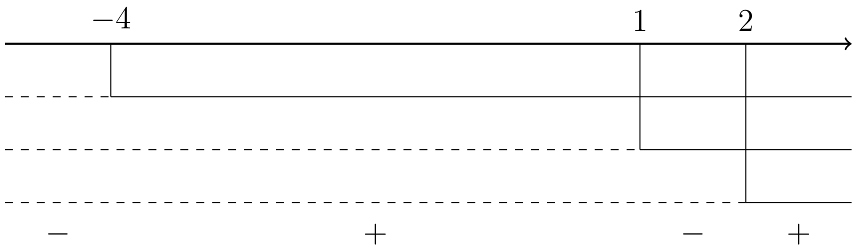
mentre interseca l'asse delle ordinate solo nel punto $(0, -1)$; infatti,

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x^4-1}{x^3+x^2-10x+8} \\ f(x) = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} (x^2+1)(x^2-1) = 0 \\ f(x) = 0 \end{cases},$$

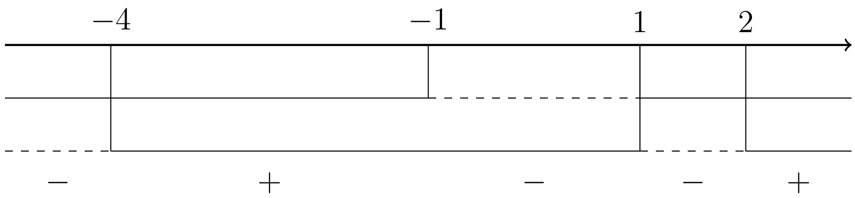
e siccome la soluzione $x = 1$ non è accettabile, abbiamo

$$\begin{cases} x = -1 \\ f(x) = 0 \end{cases}.$$

Per studiare il segno, occorre studiare la disequazione $f(x) > 0$. Il numeratore è positivo quando $x < -1 \vee x > 1$, mentre il denominatore è positivo quando $-4 < x < 1 \vee x > 2$, perchè



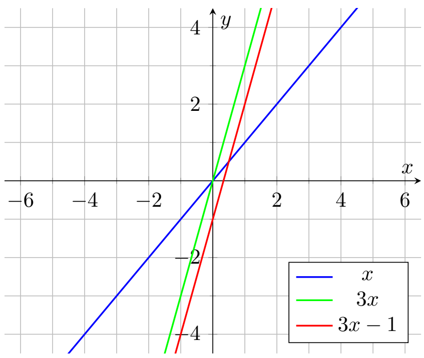
In definitiva, la funzione è positiva in $(-4, -1) \cup (2, +\infty)$.



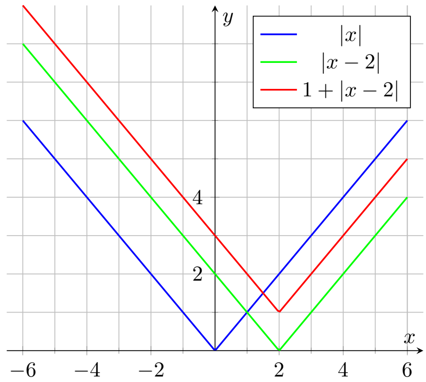
Esercizio 4.
Tracciare il grafico di ciascuna delle seguenti funzioni considerandola come traslata di una funzione elementare:

(i) $f(x) := 3x - 1$; (ii) $f(x) := 1 + |x - 2|$; (iii) $f(x) := x^2 - x + 3$;
(iv) $f(x) := \sqrt{x-2}$; (v) $f(x) := x^3 + 1$; (vi) $f(x) := \frac{1-3x}{x+1}$.

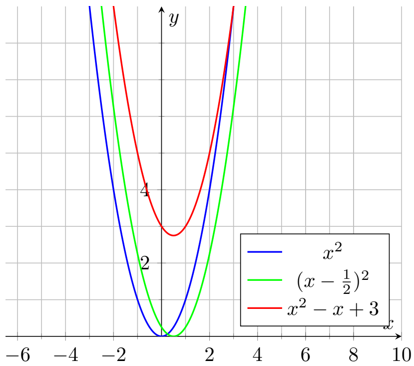
Soluzione.



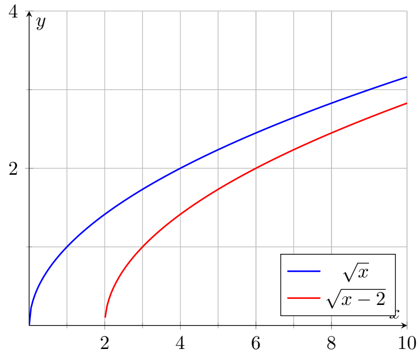
(a) Grafico delle funzioni x, $3x$ e $3x - 1$



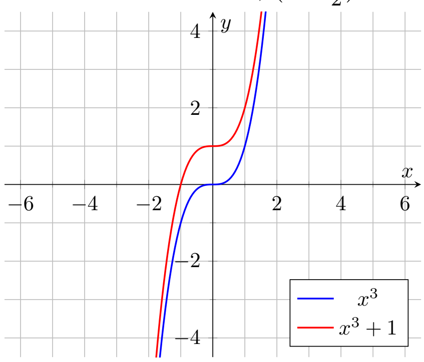
(b) Grafico delle funzioni $|x|$, $|x-2|$ e $1+|x-2|$



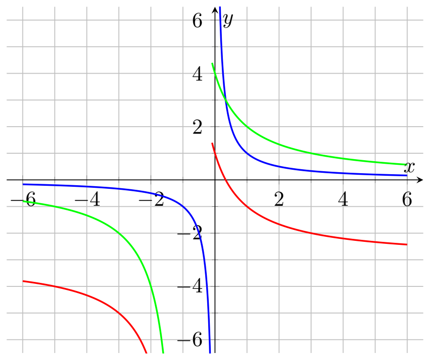
(c) Grafico delle funzioni x^2, $(x-\frac{1}{2})^2$ e x^2-x+3



(d) Grafico delle funzioni $\sqrt{x}$, e $\sqrt{x-2}$

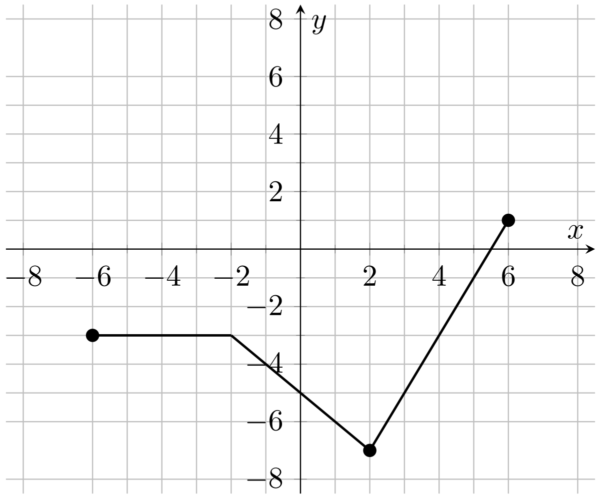


(e) Grafico delle funzioni x^3, e $x^3 + 1$


(f) Grafico delle funzioni $\frac{1}{x}$, $\frac{4}{x+1}$ e $\frac{1-3x}{x+1}$

Grafici delle funzioni elementari e le relative traslate

Esercizio 5.
Dato il grafico della funzione "$y = g(x)$" in figura, disegnare il grafico delle trasformazioni sottostanti



Soluzione.

(a) $y = g(2x)$

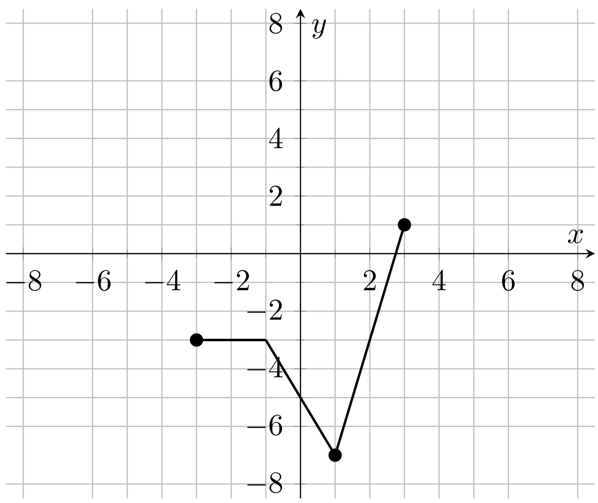
(b) $y = \frac{g(x)}{2}$

(c) $y = 2g(3x)$

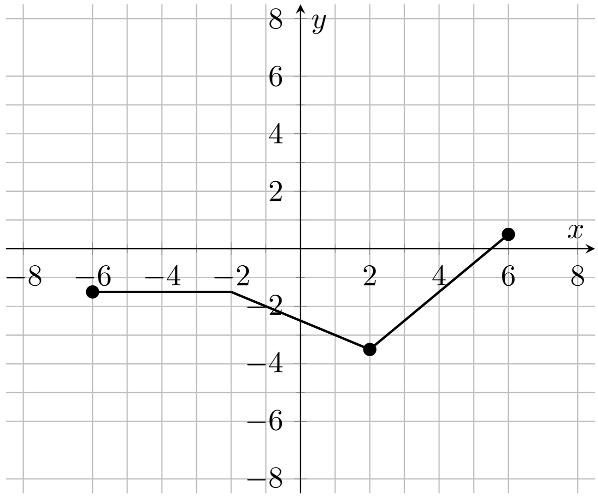
(d) $y = \left|g\left(\frac{x}{2}\right)\right|$

Soluzione.

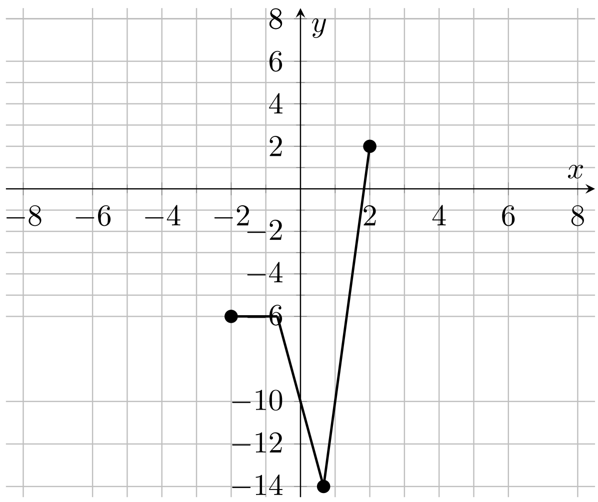
(a) Per ottenere $y = g(2x)$ si deve comprimere $y = g(x)$ di un fattore 2 orizzontalmente; il suo grafico è



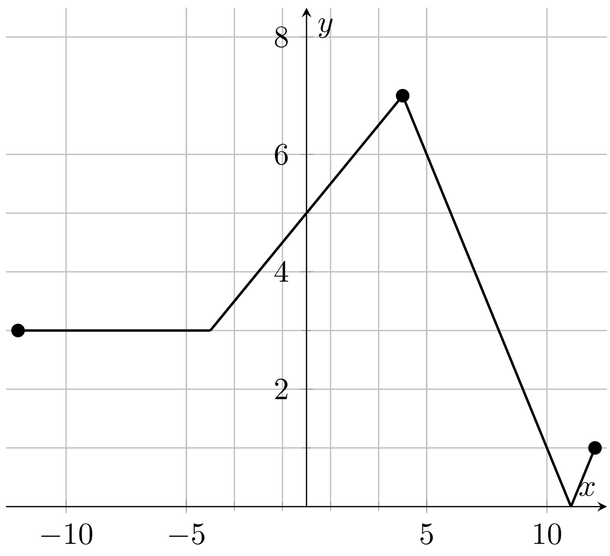
(b) Per ottenre $y = \frac{g(x)}{2}$ si deve allungare $y = g(x)$ di un fattore $\frac{1}{2}$ verticalmente; il suo grafico è



(c) Per ottenere $y = 2g(3x)$ si deve comprimere $y = g(x)$ di un fattore 3 orizzontalmente e poi allungare di un fattore 2 verticalmente; il suo grafico è



(d) Per ottenere $y = \left|g\left(\frac{x}{2}\right)\right|$ si deve comprimere $y = g(x)$ di un fattore $\frac{1}{2}$ orizzontalmente e poi prenderne il modulo; il suo grafico è



Esercizio 6.
Scrivere le equazioni della rette che contengono i lati del quadrilatero $ABCD$, con vertici $A = (-3; 3)$, $B = (-3; -1)$, $C = (2; -2)$, $D = (2; 2)$. Verificare che il quadrilatero è un parallelogramma.

Soluzione.
Per definizione un quadrilatero è un parallelogramma se e solo se ha i lati opposti paralleli e congruenti. È facile notare che la retta passante per i punti A e B è parallela alla retta passante per i punti C e D, perché entrambe parallele all'asse delle ordinate; inoltre, sfruttando la formula della distanza tra due punti,

$$d(P, Q) = \sqrt{(x_q - x_p)^2 + (y_q - y_p)^2}, \tag{1}$$

otteniamo

$$d(A, B) = \sqrt{0^2 + 4^2} = \sqrt{16} = 4 = d(C, D).$$

Per determinare l'equazione della retta passante per B e C, e della retta passante per D ed A, usiamo la formula della retta passante per 2 punti

$$\frac{y - y_2}{y_1 - y_2} = \frac{x - x_2}{x_1 - x_2}.$$

La retta passante per B e C ha equazione $x + 5y = -8$ e la retta passante per D ed A ha equazione $x + 5x = 12$; è avendo lo stesso coefficiente angolare sono parallele. Infine, dato che

$$d(B, C) = \sqrt{5^2 + 1} = \sqrt{26} = d(D, A),$$

il quadrilatero è un parallelogramma.

Esercizio 7.
Verificare se i punti $A = (-3; -2)$, $B = (6; 1)$, e $C = (1; -5)$ siano allineati. Inoltre, calcolare le distanze tra i punti.

Soluzione.
Utilizzando la seguente formula

$$\frac{y_3 - y_2}{y_1 - y_2} = \frac{x_3 - x_2}{x_1 - x_2},$$

otteniamo che i tre punti non sono allineati; infatti,

$$\frac{y_3 - y_2}{y_1 - y_2} = \frac{-5 - 1}{-2 - 1} = 2 \neq \frac{5}{9} = \frac{1 - 6}{-3 - 6} = \frac{x_3 - x_2}{x_1 - x_2}.$$

Utilizzando la formula (1), otteniamo

$$d(A, B) = 3\sqrt{10}, \quad d(A, C) = 5, \quad d(B, C) = \sqrt{61}.$$

Esercizio 8.
Data la retta del piano r di equazione $2x - 3y = 9$ ed il punto esterno $p = (4; -1)$ trovare:

1. la retta parellela a r passante per p
2. la retta perpendicolare a r passante per p.

Soluzione.
Per prima cosa, scriviamo l'equazione del fascio di rette passante per p:

$$y = m(x - 4) - 2 \text{ oppure } a(x - 4) = b(x - 1).$$

1. Per la condizione di parallelismo $m = m'$ (oppure $ab' = a'b$), otteniamo che a retta del fascio parrallela alla retta r ha equazione $2x - 3y - 11 = 0$.
2. Per la condizione di ortogonalità $m \cdot m' = -1$ (oppure $aa' + bb' = 0$), otteniamo che a retta del fascio perpendicolare alla retta r ha equazione $3x + 2y - 10 = 0$.

Esercizio 9.
Determinare per quali valori di k, le rette

$$r \,:\, y = (3k - 2)x + 8, \quad s \,:\, y = 5x + 1,$$

sono parallele. Per quali valori di k, le rette sono perpendicolari.

Soluzione.
Le due rette sono parallele se hanno lo stesso coefficiente angolare; quindi,

$$3k - 2 = 5 \Longrightarrow 3k = 7 \Longrightarrow k = \frac{7}{3}.$$

Mentre le due rette sono ortogonali se $m \cdot m' = -1$; quindi,

$$5(3k - 2) = -1 \Longrightarrow 15k - 10 = -1 \Longrightarrow k = \frac{3}{5}.$$

Esercizio 10.
Determinare per quali valori di k, la retta $(k-1)x + (2-k)y + (2k-1) = 0$ è:

(a) parallela all'asse delle x;

(b) parallela all'asse delle y;

(c) parallela alla retta di equazione $x + 2y - 3 = 0$;

(d) perpendicolare alla retta di equazione $x + 2y - 3 = 0$.

Soluzione.

(a) Una retta è parallela all'asse delle x se è del tipo $y = k$; di conseguenza, deve necessariamente essere $k = 1$.

(b) Una retta è parallela all'asse delle y se è del tipo $x = k$; di conseguenza, deve necessariamente essere $k = 2$.

(c) Per la condizione di parallelismo $ab' = ba'$, si deve avere che

$$2(k-1) = 2 - k \Longrightarrow k = \frac{4}{3}.$$

(d) Per la condizione di ortogonalità $aa' + bb' = 0$, si deve avere che

$$k - 1 + 2(2-k) = 0 \Longrightarrow k = 3.$$

.

Esercizio 11.
Determinare per quali valori di k, la retta di equazione $2x - y + k = 0$ ha, dal punto $p = (1; 2)$, distanza uguale a $\sqrt{5}$. Determinare, inoltre, per quali valori di h, il punto $q = (h; 3h)$ ha distanza unitaria dalla retta di equazione $y = -2x - 1$.

Soluzione.
Per determinare la distanza punto retta, abbiamo le seguenti formule:

$$d(P, r) = \frac{|ax_o + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad d(P, r) = \frac{|y_0 - (mx_0 + q)|}{\sqrt{1 + m^2}}, \tag{2}$$

a seconda se l'equazione della retta è data in forma esplicita o implicita. Nel primo caso, utilizzando la prima formula in (2), abbiamo che

$$\sqrt{5} = d(p, r) = \frac{|2 - 2 + k|}{\sqrt{5}} \Longrightarrow |k| = 5 \Longrightarrow k = \pm 5.$$

Nel secondo caso, utilizzando la seconda formula in (2), abbiamo che

$$1 = d(q, s) = \frac{|3h - (-2h - 1)|}{\sqrt{1 + 4}} \Longrightarrow |5h + 1| = \sqrt{5} \Longrightarrow h = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{5}.$$

Esercizio 12.
Determinare una funzione quadratica il cui grafico passa per i seguenti punti

$$(-1, 1), \ \ (1, 1), \ \ (3, 9).$$

Soluzione.
L'equazione della parabola è del tipo $y = ax^2 + bx + c$. Le condizioni di appartenenza della parabola ai punti A, B e C fornisce il seguente sistema

$$\begin{cases} 1 = a + b + c \\ 1 = a - b + c \\ 9 = 9a + 3b + c \end{cases} .$$

Risolvendo il sistema (ad esempio, per sostituzione) otteniamo che l'unica soluzione è rappresentata da $a = 1$, $b = c = 0$. Di conseguenza, l'equazione della funzione cercata è $y = x^2$.

Esercizio 13.
Determinare l'equazione della parabola il cui vertice è il punto $(2, 4)$ ed il suo punto di intersezione con l'asse y è $(0, 2)$.

Soluzione.
L'equazione della parabola è del tipo $y = ax^2 + bx + c$. Le condizioni di appartenenza della parabola al punti $(0, 2)$ fornisce la seguente relazione

$$2 = c.$$

La conoscenza delle coordinate del vertice ci permette di scrivere che

$$-\frac{b}{2a} = 2 \text{ e } -\frac{b^2 - 4ac}{4a} = 4.$$

Risolvendo il sistema

$$\begin{cases} c = 2 \\ b + 4a = 0 \\ b^2 - 4ac + 16a = 0 \end{cases} ,$$

abbiamo che l'unica soluzione è rappresentata da $a = -\frac{1}{2}$, $b = 2$, e $c = 2$. Di conseguenza, l'equazione della funzione cercata è $y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 2$.

Esercizio 14.
Per ogni funzione quadratica è assegnato il vertice. Trovare valori per a e b.

(a) $y = ax^2 + bx - 27$; $(2, -3)$;

(b) $y = ax^2 + bx + 5$; $(-1, 4)$.

Soluzione.

(a) Conoscendo le coordinate del vertice abbiam o che i valori di a e b devono risolvere il seguente sistema

$$\begin{cases} b + 4a = 0 \\ b^2 - 4ac - 12a = 0 \end{cases} .$$

L'unica soluzione del sistema è data da $a = 6$ e $b = -24$.

(b) Analogamente a quanto visto nel punto precendente, i valori di a e b devono risolvere il seguente sistema

$$\begin{cases} b - 2a = 0 \\ b^2 - 4ac + 16a = 0 \end{cases}.$$

L'unica soluzione del sistema è data da $a = 1$ e $b = 2$.