Esercitazioni di Matematica Generale

Corso di laurea in Economia e Management

Numeri Complessi - Funzioni Reali di Variabile Reale

05 Ottobre 2017

Esercizio 1.
Scrivere in forma algebrica ($z = a + ib$, $a, b \in \mathbb{R}$) i seguenti numeri complessi:

$$(1-i)+(1+3i), \quad \frac{2}{1-i}, \quad \left[\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\right]^2.$$

Inoltre, per ciascuno dei precedenti numeri, determinare modulo, argomento e darne una rappresentazione trigonometrica.

Soluzione.
Un numero complesso z corrisponde ad una coppia ordinata di numeri reali (x, y). La forma algebrica di un numero complesso z consiste nell'espressione

$$z = x + iy, \quad i = \sqrt{-1}, \quad (i^2 = -1).$$

I numeri reali x e y sono detti rispettivamente parte reale e coefficiente dell' immaginario di z

$$x = \Re(z), \quad y = \Im(z).$$

Se w è un altro numero complesso cioè $w = u + iv$, le operazioni di somma e prodotto fra z e u si definiscono come

$$z + w = (x+u) + i(y+v), \quad z \cdot w = (xu - yv) + i(yu + xv).$$

Nella somma si sommano separatamente parte reale e coefficienti dell' immaginario mentre nel prodotto si opera simbolicamente tenendo conto che $i^2 = -1$; in particolare l'opposto $-z$ ed il reciproco z^{-1} ($z \neq 0$) di un numero complesso sono

$$-z = -x - iy, \quad z^{-1} = \frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2}, \; z \neq 0, \; (x,y) \neq (0,0).$$

I numeri complessi si possono identificare con i punti del piano reale ed è particolarmente importante la simmetria rispetto all'asse delle ascisse

$$z = x + iy \longrightarrow \bar{z} = x - iy,$$

che prende il nome di coniugio. Il coniugio è una funzione complessa di variabile complessa che conserva le operazioni di somma e prodotto e se applicato due volte consecutive, torna al valore z di partenza; cioè

$$z \bar{+} w = \bar{z} + \bar{w}$$
$$z \bar{\cdot} w = \bar{z} \cdot \bar{w}$$
$$\bar{\bar{z}} = z.$$

Consideriamo il seguente prodotto

$$z \cdot \bar{z} = (x+iy)(x-iy) = x^2 + y^2 = |z|^2,$$

essendo

$$|z| = \sqrt{x^2 + y2} = \sqrt{(\Re(z))^2 + (\Im(z))^2}, \text{ modulo di } z,$$

la distanza nel piano $(x\,y)$ del punto (x, y) da 0.
La rappresentazione nel piano dei numeri complessi permette la loro rappresentazione mediante coordinate polari che prende il nome di forma trigonometrica:

$$\rho = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \theta = arg(z) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right), \quad x = \rho\cos(\theta), \quad y = \rho\sin(\theta).$$

Detto questo, abbiamo che

1. Sommando i due numeri complessi, otteniamo che

$$(1-i) + (1+3i) = 2 + 2i.$$

   Il suo modulo è $2\sqrt{2}$ e il suo argomento è $\frac{\pi}{4}$; infatti,

$$|2+2i| = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}, \quad \theta = \arctan\left(\frac{2}{2}\right) = \arctan(1) = \frac{\pi}{4};$$

   di conseguenza, otteniamo la seguente rappresentazione

$$2 + 2i = 2\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right).$$

2. Moltiplicando e dividendo il numero complesso per il suo coniugato, otteniamo che

$$\frac{2}{1-i} = \frac{2(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{2+2i}{1-(i)^2} = \frac{2+2i}{2} = 1 + i.$$

   Il suo modulo è $\sqrt{2}$ e il suo argomento è $\frac{\pi}{4}$; infatti,

$$|1+1i| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}, \quad \theta = \arctan(1) = \frac{\pi}{4};$$

   di conseguenza, otteniamo la seguente rappresentazione

$$1 + 1i = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right).$$

3. Elevando al quadrato, otteniamo che

$$\left[\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\right]^2 = \frac{2}{4}(1+i)^2 = \frac{1}{2}(1+2i+(i)^2) = \frac{1}{2}(1+2i+-1) = i.$$

   Il suo modulo è 1 e il suo argomento è $\frac{\pi}{2}$; infatti,

$$|i| = \sqrt{0+1} = 1, \quad \theta = \arctan\left(\frac{1}{0}\right) = \arctan(+\infty) = \frac{\pi}{2};$$

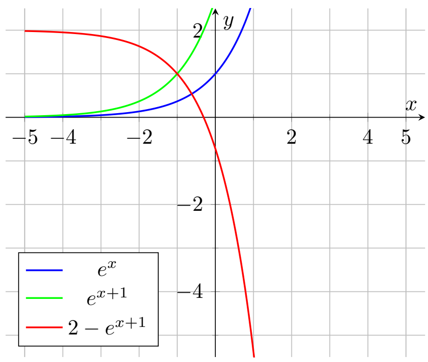
   di conseguenza, otteniamo la seguente rappresentazione

$$i = \left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right).$$

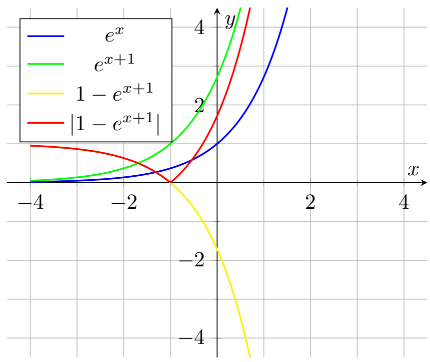
Esercizio 2.
Tracciare il grafico di ciascuna delle seguenti funzioni considerandola come traslata di una funzione elementare:

$$\text{(i)}\quad f(x) := 2 - e^{x+1}; \qquad \text{(ii)}\quad f(x) := |1 - e^{x+1}|;$$
$$\text{(iii)}\quad f(x) := \ln(|x| - 2); \qquad \text{(iv)}\quad f(x) := |\ln(1 - x)|.$$

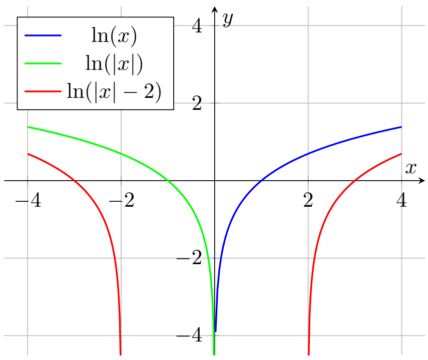
Soluzione.



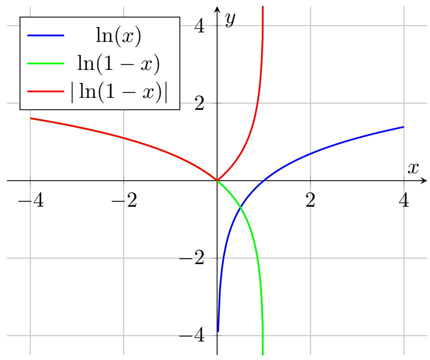
(a) Grafico delle funzioni e^x, e^{x+1} e $2 - e^{x+1}$



(b) Grafico delle funzioni e^x, e^{x+1}, $1 - e^{x+1}$ e $|1 - e^{x+1}|$



(c) Grafico delle funzioni $\ln(x)$, $\ln(|x|)$ e $\ln(|x| - 2)$



(d) Grafico delle funzioni $\ln(x)$, $\ln(1 - x)$ e $|\ln(1 - x)|$

Grafici delle funzioni elementari e le relative traslate

Esercizio 3.
Per le seguenti coppie di funzioni:

$$\text{(i)}\quad f(x) := x^3, \quad g(x) := \sqrt{2x - 1}; \quad \text{(ii)}\quad f(x) := 2x^2, \quad g(x) := e^x,$$

determinare $f(g(x))$, $g(f(x))$, $f(f(x))$ e $g(g(x))$.

Soluzione.
Date f e g la funzione composta $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ è quella che preso un valore della variabile x, prima calcola $g(x)$ e poi applica f al valore $g(x)$; ossia

$$x \xmapsto{\ g\ } g(x) \xmapsto{\ f\ } f(g(x))$$
$$x \xmapsto{\ f \circ g\ } f(g(x))$$

Analogamente, si definisce la funzione composta $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.

(i) Per la prima coppia di funzioni, abbiamo che

$$f(g(x)) := \left(\sqrt{2x-1}\right)^3, \qquad g(f(x)) := \sqrt{2x^3-1},$$
$$f(f(x)) := \left(x^3\right)^3 = x^9, \quad g(g(x)) := \sqrt{2\sqrt{2x-1}-1}.$$

(ii) Per la seconda coppia di funzioni, abbiamo che

$$f(g(x)) := 2\left(e^x\right)^2 = 2e^{2x}, \quad g(f(x)) := e^{2x^2},$$
$$f(f(x)) := 2\left(2x^2\right)^2 = 8x^4, \quad g(g(x)) := e^{e^x}.$$

Esercizio 4.
Trovare, quando esistono, le funzioni inverse delle seguenti funzioni:

(i) $f(x) := \sqrt{x^2+4}$; (ii) $f(x) := \sqrt{x+2}$; (iii) $f(x) := \frac{1}{\sqrt[3]{x+1}}$;
(iv) $f(x) := \frac{3x}{x+1}$; (v) $f(x) := e^{x+1}$; (vi) $f(x) := \ln(x^2+1)$.

Soluzione.

(i) La funzione non è iniettiva; presi, ad esempio, $x_1 = -1$ e $x_2 = 1$, le immagini sono uguali
$$f(x_1) = \sqrt{(-1)^2+4} = \sqrt{(1)^2+4} = f(x_2).$$
Di conseguenza, la funzione inversa non esiste.

(ii) La funzione essendo una traslata della funzione elementare $\sqrt{x}$ è biettiva (e di conseguenza è invertibile) come funzione definita in $[-2,+\infty)$, a valori in $[0,+\infty)$. La funzione inversa è data da

$$\sqrt{x+2} = y \Longrightarrow x+2 = y^2 \Longrightarrow x = y^2-2.$$

(iii) La funzione è definita in tutto $\mathbb{R}$ escluso il punto -1, perché il denominatore si annulla nel punto $x=-1$. È una funzione iniettiva perché comunque fissati $x_1 \neq x_2$ (ad esempio, $x_1 = -2$ e $x_2 = 2$, le immagini sono diverse

$$f(x_1) = \frac{1}{\sqrt[3]{x_1+1}} \neq \frac{1}{\sqrt[3]{x_2+1}} = f(x_2);$$

inoltre è anche suriettiva; infatti,

$$\frac{1}{\sqrt[3]{x+1}} = y \Longrightarrow^3 \sqrt{x+1} = \frac{1}{y} \Longrightarrow x+1 = \frac{1}{y^3} \Longrightarrow y = \frac{1-y^3}{y^3}.$$

Quindi, la funzione è biettiva, è perciò invertibile e la sua inversa è

$$f^{-1} : \mathbb{R}\backslash\{0\} \longrightarrow \mathbb{R}\backslash\{-1\}, \quad f^{-1}(y) = \frac{1-y^3}{y^3}.$$

(iv) Per l'algoritmo di divisione euclidea, abbiamo che

$$\frac{3x}{x+1} = 3 - \frac{3}{x+1},$$

e come traslata della funzione elementare $\frac{1}{x}$ è biettiva (e quindi invertibile) come funzione definita in tutto $\mathbb{R}$ escluso il punto -1. Siccome la funzione è suriettiva,

$$3 - \frac{3}{x+1} = y \Longrightarrow \frac{3}{x+1} = 3 - y \Longrightarrow x + 1 = \frac{3}{3-y} \Longrightarrow x = \frac{y}{3-y},$$

la sua inversa è data

$$f^{-1} : \mathbb{R}\backslash\{3\} \longrightarrow \mathbb{R}\backslash\{-1\}, \quad f^{-1}(y) = \frac{y}{3-y}.$$

(v) La funzione essendo una traslata della funzione elementare e^x è biettiva (e di conseguenza è invertibile) come funzione definita in $\mathbb{R}$, a valori in $(0, +\infty)$. La funzione inversa è data da

$$e^{x+1} = y \Longrightarrow x + 1 = \ln(y) \Longrightarrow x = \ln(y) - 1.$$

(vi) La funzione non è iniettiva; presi, ad esempio, $x_1 = -1$ e $x_2 = 1$, le immagini sono uguali

$$f(x_1) = \ln((-1)^2 + 1) = \ln((1)^2 + 1) = f(x_2).$$

Esercizio 5.
Per ciascuna delle seguenti funzioni, stabilire se le funzioni sono pari, dispari oppure né pari né dispari. Inoltre stabilire, il dominio, il segno e le intersezioni con gli assi:

(i) $f(x) := |x^3 - 1| \ln(x^3 - 1)$; (ii) $f(x) := x \ln(x^2 - 3)$;

(iii) $f(x) := xe^{\frac{1}{x}}$; (iv) $f(x) := \frac{e^{-(x+3)}}{\sqrt{x+1}}$.

Soluzione.

(i) Osserviamo prima di tutto che

$$f(x) := |x^3 - 1| \ln(x^3 - 1) = (x^3 - 1) \ln(x^3 - 1),$$

perché, per come è definita la funzione modulo, abbiamo che

$$f(x) := \begin{cases} (x^3 - 1) \ln(x^3 - 1) & \text{quando } x > 1 \\ (1 - x^3) \ln(x^3 - 1) & \text{quando } x < 1 \end{cases},$$

ma siccome la funzione logaritmo è definita quando il suo argomento è positivo (in questo caso quando $x > 1$) abbiamo che la funzione $f(x)$ non è definita per $x < 1$. Ne consegue che la funzione è definita nell'intervallo $(1, +\infty)$.
La funzione non è né pari né dispari; infatti,

$$f(-x) := -(x^3 + 1) \ln(-x^3 - 1) \neq f(x) \qquad \text{e} \qquad f(-x) \neq -f(x).$$

Non avendo senso cercare i punti di intersezione con l'asse delle ordinate in quanto prima di 1 la funzione non è definita, determiniamo i punti di intersezione con l'asse delle ascisse:

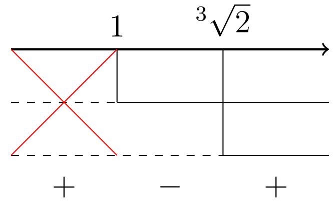
$$\begin{cases} f(x) = (x^3-1)\ln(x^3-1) \\ f(x) = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} (x^3-1)\ln(x^3-1) = 0 \\ f(x) = 0 \end{cases}$$

da cui otteniamo

$$\begin{cases} x^3 = 1 \vee \ln(x^3-1) = 0 \\ f(x) = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 1 \vee x^3 - 1 = 1 \\ f(x) = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 1 \vee x =^3 \sqrt{2} \\ f(x) = 0 \end{cases}.$$

Dato che per $x = 1$, la funzione $\ln(x^3-1)$ non è definita, la soluzione $x = 1$ non è accettabile (almeno per il momento) e di conseguenza l'unico punto di intersezione è il punto $(\sqrt[3]{2}, 0)$.
Per studiare il segno della funzione, risolviamo la disequazione $f(x) > 0$. In particolare, essendo un prodotto di fattori, la funzione sarà positiva o quando entrambi i fattori son positivi o quando entrambi son negativi:

$$f(x) > 0 \iff x^3 - 1 > 0,\ \ln(x^3-1) > 0 \iff x > 1,\ x >^3 \sqrt{2}.$$



Dato che la funzione è definita per $x > 1$, abbiamo che è positiva in $(\sqrt[3]{2}, +\infty)$.

(ii) Dato che la funzione logaritmo è definita se il suo argomento è positivo, abbiamo che la funzione $f(x)$ è definita nell'insieme delle x tale che $x^2 - 3 > 0$; ovvero

$$x^2 - 3 > 0 \iff x^2 > 3 \iff x < -\sqrt{3} \vee x > \sqrt{3}.$$

Dato che

$$f(-x) := -x\ln((-x)^2 - 3) = -f(x),$$

la funzione è dispari. Dato che la funzione in 0 non è definita, cerchiamo solo i punti di intersezione con l'asse delle ascisse:

$$\begin{cases} f(x) = x\ln(x^2-3) \\ f(x) = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x\ln(x^2-3) = 0 \\ f(x) = 0 \end{cases}$$

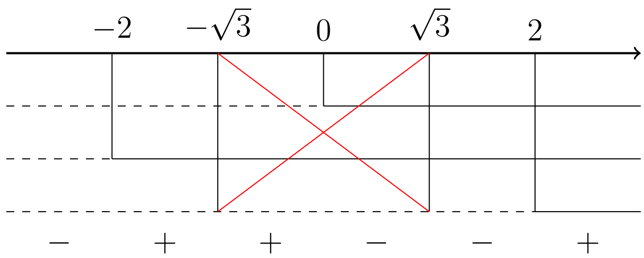
da cui otteniamo

$$\begin{cases} x = 0 \vee \ln(x^2-3) = 0 \\ f(x) = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 1 \vee x^2 - 3 = 1 \\ f(x) = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 1 \vee x = \pm 2 \\ f(x) = 0 \end{cases}.$$

Dato che per $x = 0$, la funzione $f(x)$ non è definita, la soluzione $x = 0$ non è accettabile e di conseguenza gli unici punti di intersezione è il punto $(-2, 0)$ e $(0, 2)$.

Per studiare il segno della funzione, risolviamo la disequazione $f(x) > 0$. In particolare, essendo un prodotto di fattori, la funzione sarà positiva o quando entrambi i fattori son positivi o quando entrambi son negativi:

$$f(x) > 0 \iff x > 0,\ \ln(x^2 - 3) > 0 \iff x > 0,\ x < -2 \lor x > 2.$$



Dato che nell'intervallo $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$ la funzione non è definita, essa è positiva nell'insieme $(-\infty, -2) \cup (2, \infty)$.

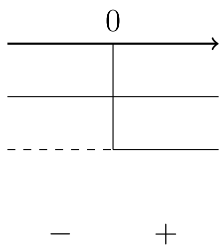
(iii) Dato che nel punto $x = 0$ l'argomento dell'esponenziale non è definito, la funzione $f(x)$ è definita in tutto $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ (almeno per il momento). La funzione non è né pari né dispari; infatti,

$$f(-x) = -xe^{-\frac{1}{x}} \neq f(x), \quad f(-x) \neq -f(x).$$

Determianiamo i punti di intersezione; entrambi i seguenti sistemi,

$$\begin{cases} f(x) = xe^{\frac{1}{x}} \\ x = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} f(x) = xe^{\frac{1}{x}} \\ f(x) = 0 \end{cases},$$

hanno un'unica soluzione data dal punto $(0, 0)$ (che al momento riteniamo non accettabile). Dato che $e^{\frac{1}{x}}$ è sempre positivo, ne segue che la funzione è positiva per $x > 0$.



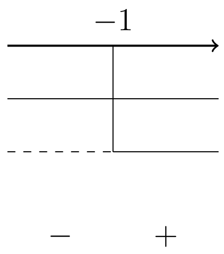
(iv) La funzione è definita su tutto $\mathbb{R}\backslash\{x,\ x+1 < 0,\ x \neq -1\} = (-1, +\infty)$. La funzione non è né pari e né dispari; infatti

$$f(-x) = \frac{e^{x-3}}{\sqrt{1-x}} \neq -f(x), \quad f(-x) \neq f(x).$$

L'unico punto di intersezione è $(0, e^{-3})$; infatti,

$$\begin{cases} f(x) = \frac{e^{-x-3}}{\sqrt{x+1}} \\ x = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} f(0) = \frac{e^{-0-3}}{\sqrt{0+1}} = e^{-3} \\ x = 0 \end{cases}$$

Dato che in numeratore è sempre definito, la funzione è positiva se $x > -1$ e di conseguenza in tutto il suo insieme di definizione.



Esercizio 6.
Risolvere le seguenti equazioni e disequazioni:

(i)	$\sqrt{4x+1} < 2x-1;$	(ii)	$\sqrt{x^2-1} > x+3;$
(iii)	$\sqrt{3x+1} = 3-x;$	(iv)	$\ln(x+4)+\ln(x-3) < \ln(x+13);$
(v)	$\log_7(x^2+6x)-\log_7(x-10) = 2;$	(vi)	$2^{x+1}+2^x > 48;$
(vii)	$2^{2x}-5\cdot 2^x+4 < 0;$	(viii)	$\sin^2(x)+3\cos^2(x)+\sin(x)-2 = 0;$
(ix)	$3\sin(x)+\sqrt{3}\cos(x) > 0;$	(x)	$\frac{4\sin^2(x)-3}{\cos(x)} < 0.$

Soluzione.

(i) Consideriamo la disequazione irrazionale

$$\sqrt{A(x)} < B(x); \tag{1}$$

poiché il polinomio $B(x)$ è un polinomio reale nella variabile reale x, perché il confronto abbia senso, anche il primo membro dovrà essere reale. Porremo, quindi:

$$A(x) \geq 0.$$

Osserviamo, inoltre che anche il radicale è preceduto dal segno $+$; il primo membro della disequazione non potrà mai essere negativo e dovremo porre la condizione di positività del secondo membro:

$$B(x) > 0.$$

Assicurataci la positivià dei due membri, potremmo elevare al quadrato e avremo la condizione:

$$A(x) < B^2(x).$$

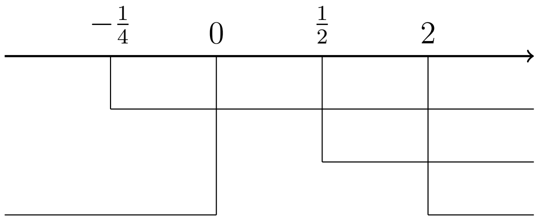
Concludendo, diremo che una disequazione di tipo (1) avrà per soluzioni tutti i valori della variabile che verificano il seguente sistema:

$$\begin{cases} A(x) \geq 0 \\ B(x) > 0 \\ A(x) < B^2(x) \end{cases} .$$

Nel nostro caso, per determinare la soluzione della disequazione, basterà risolvere il sistema

$$\begin{cases} 4x+1 \geq 0 \\ 2x-1>0 \\ 4x+1<(2x-1)^2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 4x+1 \geq 0 \\ 2x-1>0 \\ x^2-2x>0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{1}{4} \\ x>\frac{1}{2} \\ x<0 \vee x>2 \end{cases} .$$

Come si evince, il sistema è verificato per $x>2$.



(ii) Consideriamo la disequazione irrazionale

$$\sqrt{A(x)} > B(x); \tag{2}$$

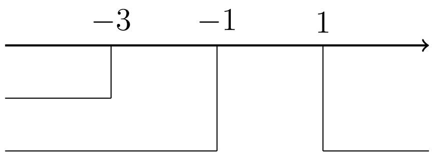
tale disequazione sarà risolta mediante i seguenti sistemi:

$$\begin{cases} B(x)<0 \\ A(x) \geq 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} B(x) \geq 0 \\ A(x) > B^2(x) \end{cases} .$$

Infatti, se $B(x)$ fosse negativo, qualunque valore della x verificherà la disequazione data purché sia un valore che renda reale il primo membro. Se, invece, $B(x)$ fosse non negativo, potremmo innalzare al quadrato senza proccuparci della condizione $A(x) \geq 0$, in quanto è già implicita nella seconda disequazione del secondo sistema.
Nel nostro caso, per determinare la soluzione della disequazione, sarà sufficiente determinare l'unione delle soluzione dei seguenti sistemi:

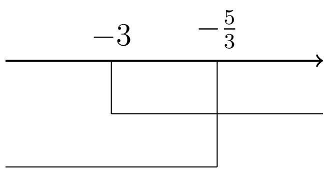
$$\begin{cases} x+3<0 \\ x^2-1 \geq 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} x+3 \geq 0 \\ x^2-1>(x+3)^2 \end{cases} .$$

Il primo sistema ha soluzione per $x<-3$.



Il sistema sistema, invece, è verificato per $-3 \leq x < -\frac{5}{3}$; infatti,

$$\begin{cases} x+3 \geq 0 \\ x^2-1>(x+3)^2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x \geq -3 \\ x^2-1>x^2+6x+9 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x \geq -3 \\ x<-\frac{5}{3} \end{cases} .$$



(iii) Una equazione irrazione del tipo

$$\sqrt{A(x)} = B(x),$$

si risolve innalzando al quadrato i due membri dell'equazione e sottoponendo a verifica le radici trovate accettando soltando quelle radici che verificano l'equazione irrazionale data. Dato che l'equazione

$$A(x) = B^2(x),$$

ha per radici, oltre a quelle dell'equazione irrazionale data, anche quelle dell'equazione irrazionle seguente

$$\sqrt{A(x)} = -B(x),$$

occorre ritenere accettabili quelle radici che risolvono il seguente sistema

$$\begin{cases} A(x) \geq 0 \\ B(x) \geq 0 \\ A(x) = B^2(x) \end{cases} \iff \begin{cases} B(x) \geq 0 \\ A(x) = B^2(x) \end{cases} .$$

Nel nostro caso, tale equazione è risolta dal sistema

$$\begin{cases} 3 - x \geq 0 \\ 3x + 1 = (3 - x)^2 \end{cases} \iff \begin{cases} x \leq 3 \\ x^2 - 9x + 8 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x \leq 3 \\ x_1 = 1 \vee x_2 = 8 \end{cases} ,$$

di cui l'unica radice accettabile è $x_1 = 1$.

(iv) Dato che la funzione logaritmo è definita quando il suo argomeno è positivo, la disequazione ha senso solo nell'insieme delle x, che verificano il seguente sistema

$$\begin{cases} x + 4 > 0 \\ x - 3 > 0 \\ x + 13 > 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x > -4 \\ x > 3 \\ x > -13 \end{cases} \qquad \text{ossia } x > 3.$$

Nell'insieme $(3, +\infty)$, abbiamo

$$\ln(x + 4) + \ln(x - 3) < \ln(x + 13) \iff \ln[(x + 4)(x - 3)] < \ln(x + 13),$$

e, trattandosi di logaritmi naturali, abbiamo la disequazione algebrica

$$(x + 4)(x - 3) < x + 13 \iff x^2 - 25 < 0 \iff -5 < x < 5.$$

Tenendo conto della condizione di esistenza $x > 3$, ne consegue che la disequazione ha soluzione per $3 < x < 5$.

(v) L'equazione ha senso solo nell'insieme delle x, che verificano il seguente sistema

$$\begin{cases} x^2 + 6x > 0 \\ x - 10 > 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x < -6 \vee x > 0 x > 10. \end{cases} \qquad \text{ossia } x > 10.$$

Nell'insieme $(10, +\infty)$, abbiamo

$$\log_7(x^2 + 6x) - \log_7(x - 10) = 2 \iff \log_7 \left[\frac{x^2 + 6x}{x - 10}\right] = 2,$$

e, trattandosi di logaritmi in base 7, abbiamo la equazione algebrica

$$\frac{x^2 + 6x}{x - 10} = 7^2 = 49 \iff \frac{x^2 + 6x}{x - 10} = \frac{49(x - 10)}{x - 10} \iff \frac{x^2 - 43 + 490}{x - 10} = 0.$$

Dato che $x^2 - 43 + 490 = 0$ non ha soluzioni reali, l'equazione non ammette soluzioni.

(vi) Per la seguente catena, abbiamo che

$$2^{x+1} + 2^x > 48 \iff 2^x(2 + 1) > 48 \iff 2^x > 16 \iff 2^x > 2^4.$$

Passando ai logaritmi in base 2, abbiamo che la disequazione è verificata per $x > 4$.

(vii) Ponendo $y = 2^x$, abbiamo

$$2^{2x} - 5 \cdot 2^x + 4 < 0 \iff y^2 - 5y + 4 < 0,$$

che è verificata per $1 < y < 4$. Di conseguenza, abbiamo

$$1 < y < 4 \iff 2^0 < 2^x < 2^2 \iff 0 < x < 2.$$

(viii) Dalla prima relazione fondamentale della trigonometria, abbiamo che

$$\sin^2(x) + 3\cos^2(x) + \sin(x) - 2 = 0 \iff \sin^2(x) + 3[1 - \sin^2(x)] + \sin(x) - 2 = 0;$$

da cui, semplificando, otteniamo che

$$-2\sin^2(x) + \sin(x) + 1 = 0.$$

Risolvendo rispetto a $\sin(x)$, abbiamo che

$$\sin(x) = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 8}}{-4} = \frac{-1 \pm 3}{-4} = \begin{cases} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{cases}.$$

L'equazione trigonometrica elementare $\sin(x) = 1$, ha soluzione quando $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$; mentre l'equazione elementare $\sin(x) = -\frac{1}{2}$ ha soluzione quando

$$x = \left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) + 2k\pi = \frac{7}{6}\pi + 2k\pi \text{ e quando } x = \left(2\pi - \frac{\pi}{6}\right) + 2k\pi = \frac{11}{6}\pi + 2k\pi.$$

(ix) Supposto $\cos(x) \neq 0$, cioè $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, dividiamo i due membri per $\cos(x)$. Poiché $\cos(x)$ non ha segno costante, bisogna distinguere i due casi: $\cos(x) > 0$ e $\cos(x) < 0$. Si ottengono i due sistemi:

$$\begin{cases} \tan(x) > -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ \cos(x) > 0 \end{cases} \vee \begin{cases} \tan(x) < -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ \cos(x) < 0 \end{cases}.$$

Concentriamoci sul primo sistema. La prima equazione è soddisfatta per

$$2k\pi < x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad \frac{5}{6} + 2k\pi\pi < x < \frac{3}{2}\pi + 2k\pi, \quad \frac{11}{6}\pi + 2k\pi < x < 2\pi + 2k\pi;$$

La seconda disequazione è soddisfatta per

$$2k\pi < x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad \frac{3}{2} + 2k\pi < x < 2\pi + 2k\pi.$$

Da cui segue che il primo sistema è soddisfatto per

$$2k\pi < x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad \frac{11}{6} + 2k\pi < x < 2\pi + 2k\pi.$$

Passiamo al secondo sistema. La prima equazione soddisfatta per

$$\frac{\pi}{2} + 2k\pi < x < \frac{5}{6}\pi + 2k\pi \quad \frac{3}{2}\pi + 2k\pi < x < \frac{11}{6}\pi + 2k\pi;$$

La seconda equazione è soddisfatta per

$$\frac{\pi}{2} + 2k\pi < x < \frac{3}{2}\pi + 2k\pi.$$

Quindi, il secondo sistema è verificato per

$$\frac{\pi}{2} + 2k\pi < x < \frac{5}{6}\pi + 2k\pi,$$

e, di conseguenza, la disequazione è verificata per

$$2k\pi < x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad \frac{\pi}{2} + 2k\pi < x < \frac{5}{6}\pi + 2k\pi, \quad \frac{11}{6}\pi + 2k\pi < x < 2\pi + 2k\pi.$$

(x) È una disequazione di tipo frazionario; occorre studiare il segno del numeratore e del denominatore separatamente. Il numeratore è positivo quando

$$4\sin^2(x) - 3 > 0 \Longleftrightarrow \sin(x) < -\frac{3}{2} \vee \sin(x) > \frac{3}{2},$$

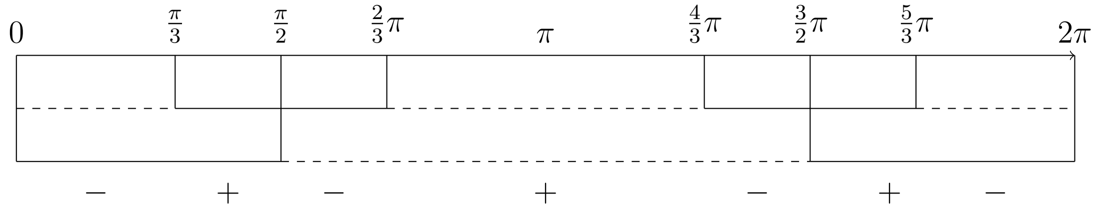
e di conseguenza per

$$\frac{\pi}{3} + 2k\pi < x < \frac{2}{3}\pi + 2k\pi, \quad \frac{4}{3}\pi + 2k\pi < x < \frac{5}{3}\pi + 2k\pi.$$

Il denominatore è positivo per

$$2k\pi < x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad \frac{3}{2}\pi + 2k\pi < x < 2\pi + 2k\pi.$$

Rappresentando il tutto



ne consegue che la disequazione è verificata per

$$2k\pi < x < \tfrac{\pi}{3} + 2k\pi \qquad \tfrac{\pi}{2} + 2k\pi < x < \tfrac{2}{3}\pi + 2k\pi$$

$$\tfrac{4}{3}\pi + 2k\pi < x < \tfrac{3}{2}\pi + 2k\pi \quad \tfrac{5}{3}\pi + 2k\pi < x < \tfrac{2}{3}\pi + 2k\pi$$