Programma particolareggiato delle lezioni svolte nel corso di laurea EM di Matematica Generale, II canale, nell'anno accademico 2018/2019 dal Prof. F. Manzini.

Il Programma presentato è quello da 12 crediti. Gli studenti che debbono superare quello da 9 crediti possono evitare gli argomenti scritti in grassetto.

Parte A

17-9 - Lez. 1 - Generalità sul corso e sulle modalità di esame. Insiemi ed elementi, sottoinsiemi, unione ed intersezione , insieme differenza, complementare, insieme delle parti, partizione di un insieme, prodotto cartesiano (cap 1 par 5.1,5.2,5.3).

18-9 - Lez. - 2 - Applicazioni fra insiemi, dominio e codominio, immagini e controimmagini (cap 2 par 1), iniettività e suriettività. Funzioni composte e funzione inversa. Esempi vari. (cap 2 par 5.1,5.2).

19-9 - Lez. 3 - Insiemi numerici : $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ con rispettive proprietà algebriche, proprietà dell'ordinamento $\leq$ e relazioni tra le operazioni e l'ordinamento; rappresentazione decimale dei numeri. Rappresentazione dei numeri su retta orientata. Densità di $\mathbb{Q}$. Insieme $\mathbb{R}$ (cap 1 par 1,2,3) e sue proprietà algebriche; irrazionalità di $\sqrt{2}$, completezza di $\mathbb{R}$ ed assioma di Dedekind.

24-9 - Lez. 4 - Corrispondenza biunivoca tra insiemi, insiemi finiti ed insiemi infiniti ma numerabili, numerabilità di $\mathbb{Z}$ (cap 1 par 8,8.2), cenni alla numerabilità di $\mathbb{Q}$. Sistema di ascisse su una retta ; intervalli propri ed impropri (cap 1 par 6,6.1), intorni di un punto, punti interni ed esterni di un insieme, insiemi aperti e chiusi (cap 10 par 2). Punti di frontiera (cap 10 par 2), punti di accumulazione e punti isolati di un insieme. Soluzione di $|x| < a$ e di $|x| \geq a$, $\forall x, a \in \mathbb{R}$, Esempi vari.

25-9 - Lez. 5 - Massimo e minimo di un insieme (cap 1 par 6,6.1), maggioranti e minoranti, estremo superiore ed inferiore di un insieme. Esempi svolti in aula.

□

Parte B

Funzioni reali di variabile reale, iniettive, suriettive, biiettive; funzione inversa. Funzioni lineari affini $f(x) = ax + b$ (con $a \neq 0$): iniettività e suriettività e calcolo esplicito della inversa. Funzione $f(x) = x^2$, funzione $f(x) = \sqrt{x}$, funzione $f(x) = |x|$; funzioni limitate, funzioni monotone (cap 2 par 6.2). Funzioni esponenziali e logaritmiche(cap 2 par 8.1, 8.2).

26-9 - Lez. 6 - Rette nel piano cartesiano, equazione in forma implicita ed esplicita; Interpretazione geometrica del coefficiente angolare ed intercetta; (cap 2 par 3), fascio di rette per un punto e retta per due punti . Parallelismo, incidenza e perpendicolarità. Equazione segmentaria della retta, distanza tra retta e punto, condizione di allineamento di tre punti. Alcuni esempi in aula.

1-10 - Lez. 7 - Definizione di polinomio, radice di un polinomio; zero di una funzione. Polinomi reali di primo e secondo grado e rispettive radici. Radici di un trinomio reale di secondo grado con $\Delta < 0$: numeri complessi; proprietà algebriche dei numeri complessi. Modulo di un numero complesso. Piano di Argand-Gauss e rappresentazione trigonometrica di un numero complesso. Esempi svolti in aula. Teorema fondamentale dell'algebra, teorema di Ruffini, fattorizzazione dei polinomi in $\mathbb{C}[\mathbb{X}]$.

2-10 - Lez. 8 - Fattorizzazione dei polinomi in $\mathbb{R}[\mathbb{X}]$. Funzioni pari e dispari. Disequazioni fratte ed irrazionali. Soluzione in aula di

$$\sqrt{2x-1} - x \geq 0, \quad -\sqrt{4x-3} + x \geq 0, \quad \sqrt[3]{x^3 + x - 1} \geq x$$

Regola di Ruffini; inizio dello studio di funzione: dominio, segno e intersezione con gli assi di:

$$\frac{3x-1}{1-x}, \quad \frac{1}{x-1} + \frac{x}{x-2}, \quad \frac{1}{\sqrt{x^2+x}}, \quad \sqrt{\frac{x-3}{x^2-3x+2}},$$
$$\frac{x^3 - x^2 + x - 1}{x^2 - 3x + 2}, \quad \frac{1}{\sqrt{2x + x^2} - x}, \quad \frac{x + 2|x|}{x-1}$$

Trasformazioni geometriche di funzioni.

3-10 - Lez. 9 - Svolte in aula (dominio, segno, intersezione con assi):

$$\log\left(x^2 - 3x + 2\right), \quad \log_{\frac{1}{2}}\left(x^2 - 3x + 2\right), \quad \frac{\log(x)}{\log(x) - 1}, \quad \frac{1}{\log(x) + 1},$$
$$\frac{1}{\log_{\frac{1}{2}}(x) - 1}, \quad e^x - e^{\frac{1}{x}}, \quad e^{\sqrt{x^2-x}} - e^{\sqrt{x}}$$

9-10 - Lez. 10 - Funzioni trigonometriche: $\sin(x), \cos(x), \tan(x)$ e loro inverse.(cap 2 par 8.3). Dominio e segno di :

$$\frac{\sin(x)}{\cos(x) - 1}, \quad \sin(\log(x))$$

Generalità sulle successioni (cap 3 par 1.1), limitatezza, monotonia (cap 2 def 6.2)

10-10 - Lez. 11 - Convergenza e divergenza (cap 3 par 1.1-1.3). Esempi svolti in aula. Successioni indeterminate (cap 3 def 1.4); successioni limitate, comportamento asintotico delle successioni monotone. Esempi vari, tra i quali dimostrare che :

$$\lim_n n^2 = +\infty$$
$$\lim_n x^n = +\infty \quad \text{per} \quad x > 1$$
$$\lim_n x^n = 0 \quad \text{per} \quad -1 < x < 1$$
$$\lim_n \log\left(\frac{1}{n}\right) = -\infty$$

Comportamento asintotico delle geometriche (cap 3 teor 3.1,par 3.2). Teoremi sulle successioni: unicità del limite (cap 3 par 1.5), confronto (cap 3 teor 5.1), carabinieri (cap 3 teor 5.2), permanenza del segno.

11-10 - Lez. 12 - Limiti di somme, prodotti, quozienti di successioni (cap 3 par 5.2). Limite di $a_n^{b_n}$. Tutte le 7 forme indeterminate; successioni infinitesime ed infinite (cap 3 par 6.1,6.2); confronto tra le successioni infinite seguenti :(cap 3 par 6.1)

$$log^{\alpha}(n), \quad n^{\beta}, \quad a^n, \quad n!, \quad n^n \quad \forall \quad \alpha > 0, \beta > 0, a > 1;$$

limiti notevoli:

$$\lim_n n \sin\left(\frac{1}{n}\right) = 1, \quad \lim_n \left(1 + \frac{k}{n}\right)^{\frac{n}{h}} = e^{\frac{k}{h}}, \quad \lim_n n^2 \left(1 - \cos\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \frac{1}{2}$$

15-10 - Lez. 13 - Confronto tra successioni infinitesime ed infinite. Esempi vari. Successioni asintotiche. **criterio del rapporto per successioni** e discussione di alcuni limiti notevoli (cap 3 par 6.1).
Serie numeriche : convergenza, divergenza, indeterminazione (cap 6 def 1.1,1.2); esempi:

$$\sum_{k\geq 1} \frac{1}{k(k+1)}, \quad \sum_{k\geq 0} \left(\frac{1}{2}\right)^k, \quad \sum_k k, \quad \sum_k (-1)^k$$

Serie geometriche e loro comportamento (cap 6 par 2); esempi vari.

16-10 - Lez. 14 - Serie a termini di segno costante (cap 6 teor 4.1), condizione necessaria di convergenza (cap 6 teor 3.1), **criterio del rapporto** (cap 6 teor 4.4) criterio del confronto (cap 6 teor 4.2), criterio del confronto asintotico, serie armonica, **divergenza della seria armonica**, serie armonica generalizzata (cap 6 esem 4.1). Funzioni reali di variabile reale : limiti finiti all'infinito. esempi vari.

17-10 - Lez. 15 - Limiti infiniti all'infinito(cap 3 par 2). Limiti al finito. Esempi vari. Teorema ponte; esempio di funzioni che non ammettono limite.

$$f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right) \quad \text{in} \quad x_0 = 0; \quad g(x) = \sin(x) \quad \text{a} \quad \pm\infty.$$

22-10 - Lez. 16 - Teoremi sulle operazioni tra limiti (cap 3 par 5.2); del confronto (cap 3 teor 5.1), dei carabinieri (cap 3 teor 5.2), della permanenza del segno (cap 3 pag.86). Calcolo dei limiti

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{\sin(x)}{x} = 0$$

Limiti destro e sinistro di una funzione (in un punto) finito o no (cap 3 par 2.1,2.2), esempi vari; calcolo di

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x}{|x|}, \quad \lim_{x\to 0^-} \frac{x}{|x|}$$

Relazione fra limiti, limiti destri e sinistri di una funzione in un punto.

23-10 - Lez. 17 - Calcolo dei limiti:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1 \quad \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$$

con argomentazioni geometriche (cap 3 es 5.11).
Funzioni infinitesime ed infinite al finito ed all'infinito; confronti fra funzioni infinitesime/infinite (cap 3 par 6). Funzioni asintotiche. Esempio di infinitesimi non confrontabili:

$$f(x) = \begin{cases} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) & x \in \mathbb{R} - \{0\} \\ 0 & x = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad g(x) = x \quad \text{in} \quad x_0 = 0.$$

Esempio di infiniti non confrontabili:

$$f(x) = 2x + x\sin(x) \quad \text{e} \quad g(x) = x \quad \text{per x} \to +\infty.$$

Infinitesimi ed infiniti campione al finito ed all'infinito. Ordine di infinitesimo o di infinito al finito e all'infinito. Esempi vari.

24-10 - Lez. 18 - Asintoti verticali e orizzontali e/o obliqui di una funzione. Continuità di una funzione, verifica che $f(x) = mx + q$ è continua su tutto l'asse reale; somma, prodotto, quoziente di funzioni continue, funzioni composte di funzioni continue. Calcolo di alcuni limiti. Teoremi sulle funzioni continue: della permanenza del segno, di Weierstrass (cap 4 teo 3.4), dei valori intermedi (cap 4 teo 3.2), degli zeri(cap 4 teo 3.1); esempi e controesempi vari.

5-11 - Lez. 19 - Calcolo di alcuni limiti ed asintoti. Definizione di derivata e interpretazione geometrica, equazione della retta tangente (cap 5 par 1) al grafico di una funzione in un punto. Derivate destre e sinistre di una funzione in un punto (cap 5, def 1.4), interpretazione geometrica; funzioni non derivabili (p.ti angolosi, p.ti di cuspide e p.ti a tangente verticale).

6-11 - Lez. 20 - Regole di derivazione e tabella delle derivate funzioni "elementari ". Relazione tra continuità e derivabilità di una funzione in un punto (cap 5, par 1.1). Punti di massimo e minimo locali e globali(cap 2, def 6.3 e 6.7), teorema di Fermat sui punti stazionari (cap 5, teor 7.1). crescenza / decrescenza di una funzione e segno della derivata prima (cap 5, par 9). Esempi svolti in aula:

$$\frac{x|x| + 2x + 1}{|x|}, \quad \frac{\log(x)}{x}, \quad xe^{\frac{1}{x}}, \quad \left(x^2 - 8\right) e^x$$

7-11 - Lez. 21 - Convessità e concavità di una funzione , interpretazione geometrica; punti di flesso, interpretazione geometrica ;(cap 5, par 12). Esempi (continuazione di quelli della lez.precedente).

12-11 - Lez. 22 -Teor. di de l'Hôpital (cap 5, par 10). Calcolo di alcuni limiti.- Differenziale, polinomio e formula di Taylor; resto nella forma di Lagrange e Cauchy; valutazione dell' infinitesimalità del resto.

13-11 - Lez. 23 - Cenni allo sviluppo in serie di Taylor di una funzione (cap 7, par 7.2 def 7.1 e parte del teor 7.5). Polinomi di Taylor delle funzioni:

$$\sqrt{x}, \quad \sin(x), \quad \cos(x), \quad e^x, \quad \log(x+1)$$

Calcolo di alcuni limiti con l'utilizzo della formula di Taylor. Cenni al confronto (figura 1) tra il grafico della funzione $\sin(x)$ ed i polinomi di Taylor di ordine 1 e 3 di essa centrati nel punto $x_0 = 0$.

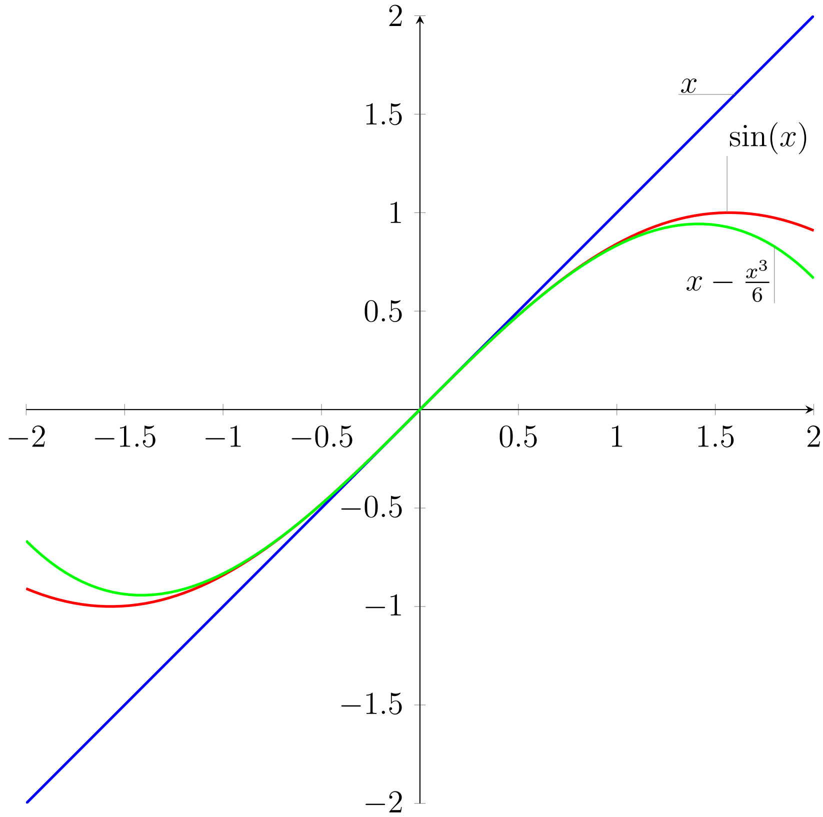

Figura 1: Confronto tra la funzione e le approssimazioni dei polinomi di Taylor.

Caratterizzazione dei punti stazionari di una funzione mediante il valore delle derivate "successive" calcolate in essi (cap 7, par 7.3 teor 7.6-7.7). Teoremi di Rolle, Lagrange, (cap 5, par 8).

14-11 - Lez. 24 - Corollario del teorema di Lagrange.

□

Parte C

Definizione di primitiva (cap 7, def 4.1), integrale indefinito (cap 7, par 5), tabella degli integrali indefiniti delle funzioni elementari.

19-11 - Lez. 25 - Integrazione per sostituzione immediata (cap 7, par 5.4). Calcolo di alcuni integrali indefiniti. Integrale definito e funzioni integrabili (secondo Riemann) (cap 7, par 1,2); esempio di funzione non integrabile (secondo Riemann) nell'intervallo $[0, 1]$: la funzione di Dirichlet

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in [0,1] \cap \mathbb{Q} \\ 0 & x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

Integrabilitá delle funzioni continue e monotone, Teorema della media integrale per funzioni limitate ed integrabili, Teorema della media integrale per funzioni continue.

20-11 - Lez. 26 - Proprietá dell'integrale definito (cap 7, par 3.1). Teorema di Torricelli - Barrow (cap 7, par 4). Esempi svolti in aula. Metodi di integrazione per parti e per sostituzione (cap 7, par 5.3,5.4). Esempi svolti in aula. Integrazione di alcune funzioni razionali:

$$\int \frac{P_n(x)}{a(x-x_0)(x-x_1)}dx \quad \text{e} \quad \int \frac{P_n(x)}{a(x-x_0)^2}dx \quad , P_n \text{ polinomio di grado } n \geq 0$$

□

Parte D

21-11 - Lez. 26 - Spazi vettoriali. $\mathbb{R}^n$ (cap 8, par 1,2) somma fra vettori e prodotto per uno scalare, eguaglianza e ordinamento. Vettori riga e colonna, combinazioni lineari tra vettori (cap 3, par 2.1), prodotto scalare tra vettori, vettori ortogonali , norma di un vettore e distanza tra 2 punti (cap 8, par 3). Sottospazi vettoriali, dipendenza ed indipendenza lineare.

Nov. - Dic. - Lezioni rimanenti - Proprietà della dipendenza lineare; combinazioni lineari tra vettori; dipendenza e proporzionalità; ortogonalità ed indipendenza, base di uno spazio vettoriale, coordinate di un vettore rispetto ad una base, dimensione di uno spazio vettoriale (cap 8, par 6), Base canonica di $\mathbb{R}^n$ (cap 8, esem 4.1). Definizione di sistema lineare (cap 9, par 1). Matrici; operazioni tra matrici: somma , prodotto per uno scalare, prodotto righe per colonne ; matrici trasposte e simmetriche, matrici diagonali, triangolari superiori ed inferiori, matrice nulla e matrice identità (cap 8, par 7,8,8.2) Determinante di una matrice quadrata secondo lo sviluppo di Laplace. Regola di Sarrus. Definizione e calcolo della matrice inversa (cap 8, par 8.3,10). Rango di una matrice (cap 8, par 11), rango per righe e per colonne di una matrice (cap 8, teor. 11.2), teorema di Kronecker (cap 8, teor. 11.1). Relazioni fra rango di una matrice quadrata, rango dei vettori riga/colonna, determinante della stessa ed inversa. Teorema di Rouché - Capelli (cap 9, par 3,3.1). Teorema di Cramer (cap 9, par 2). Soluzioni di un sistema lineare omogeneo.
Definizione di autovalore e autovettore di una matrice quadrata . Polinomio caratteristico, autospazio associato ad un autovalore. Molteplicità algebrica e geometrica di un autovalore, relazione fra le due; autovalori distinti ed autovettori indipendenti. Similitudine tra matrici, <u>matrici simili hanno lo stesso polinomio caratteristico e lo stesso determinante</u>; matrici diagonalizzabili, caratterizzazione delle matrici diagonalizzabili; matrici con autovalori distinti , costruzione della matrice diagonale associata ad una matrice diagonalizzabile e della matrice diagonalizzante.
Esempi svolti in aula.

□

Gli argomenti sottolineati sono comprensivi di dimostrazione.
Testi di riferimento:

1. Matematica per l'economia e l'azienda. L.Peccati, S.Salsa, A.Squellati - Egea - IV ed. (nuova) (riferimenti in blu)

2. Matematica Generale. Simon, Blume - Egea 2007 (riferimenti in verde).

3. Esercizi di Matematica Generale, A.Bersani, F.Manzini, L. Mastroeni, Esculapio Ed.