CAP. II - TEORIA DI BASE DELL'INTERESSE -

↳ frequentemente chiamato VALORE TEMPORALE DEL DENARO

→ CAPITALE e INTERESSE

Il concetto fondamentale di interesse è che se il tasso di interesse è r (decimale), dopo un anno l'investimento iniziale risulta moltiplicato per $(1+r)$

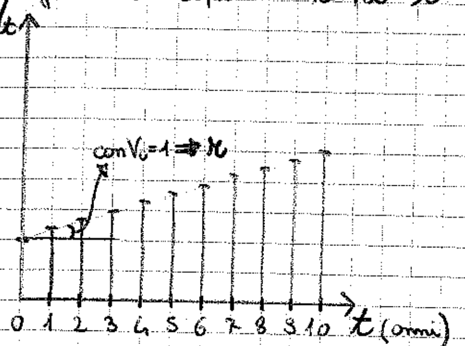
→ LEGGE DELL'INTERESSE SEMPLICE

Se si applica la legge dell'interesse semplice il denaro investito per un periodo diverso da 1 anno produce interessi proporzionali alla durata totale dell'investimento

L'investimento produce ogni anno un interesse pari a r volte l'investimento iniziale e le frazioni di anno vengono solitamente trattate in modo proporzionale.

Se una somma A è depositata su un conto a cui viene applicato l'interesse semplice r, il valore totale dopo n anni è $B_n = A(1+rn)$

In generale dopo un tempo t (in anni) il VALORE DEL CONTO è $\underbrace{V_t = V_0(1+rt)}_{\text{LEGGE DI CAPITALIZZAZIONE}}$



Dalla rappresentazione nel diagramma valori, tempo è possibile notare come la somma nel conto cresce LINEARMENTE

→ LEGGE INTERESSE COMPOSTO

Alla maggior parte dei conti bancari e dei prestiti viene applicata una forma di capitalizzazione che determina la produzione di interessi composti ovvero IL CONTO FRUTTA INTERESSI SUGLI INTERESSI ANNO DOPO ANNO.

Se la capitalizzazione è annuale, dopo 1 anno il denaro depositato su un conto risulta moltiplicato per $(1+r)$. Il II° anno cresce di un ulteriore fattore $(1+r)$ arrivando a $(1+r)^2$.

Dopo n anni il conto sarà salito a $(1+r)^n$ volte il valore originario.

L'espressione analitica della crescita di un conto al quale è applicata la LEGGE DELL'INTERESSE COMPOSTO, data la sua forma di potenza n-esima, si dice che esprime una CRESCITA GEOMETRICA

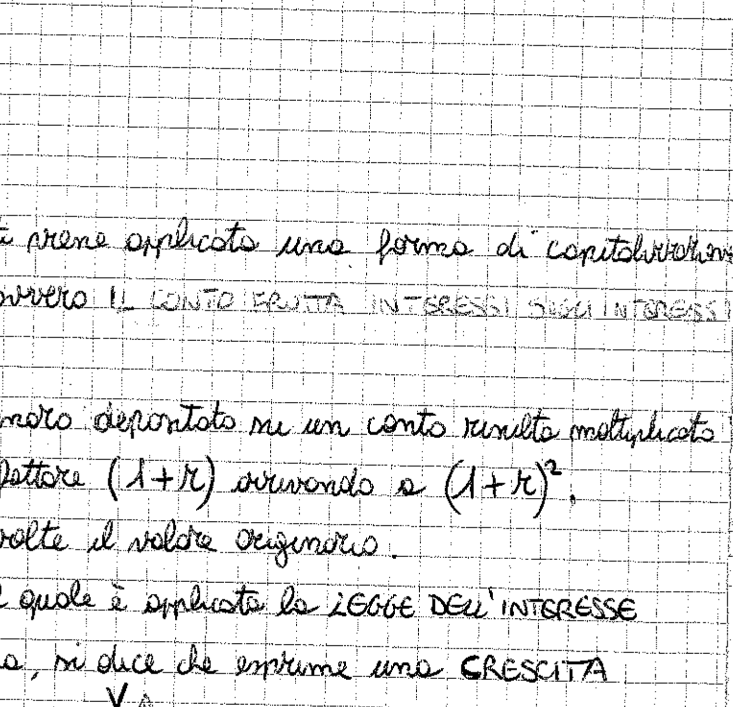
$t_0 \rightarrow V_0$

$t_1 \rightarrow V_1 = V_0(1+r)$

$t_2 \rightarrow V_2 = V_1(1+r) = V_0(1+r)(1+r) = V_0(1+r)^2$

$\vdots$

$t_n \rightarrow V_n = V_{n-1}(1+r) = V_0(1+r)^{n-1}(1+r) = V_0(1+r)^n$



Possiamo quindi notare come l'interesse non sia calcolato su V_0 ma sulla somma appena precedente

In generale dopo un tempo t (anni) il valore del conto è $V_t = V_0(1+r)^t$

Dalla rappresentazione delle curve dei valori è possibile notare come l'interesse semplice determina una crescita lineare nel tempo del valore del conto mentre l'interesse composto una crescita accelerata di tipo GEOMETRICO

→ REGOLA DEL 7-10

In presenza di regime di capitalizzazione con legge degli interessi composti con accredito annuale ci possiamo chiedere quanto impiego per ottenere il doppio del valore V_0:

$$V_t = V_0(1+r)^t = 2V_0 \Rightarrow \cancel{V_0}(1+r)^t = 2\cancel{V_0} \Rightarrow (1+r)^t = 2$$ li esprimo in forma logaritmica

$$t \log(1+r) = \log 2 \Rightarrow t = \frac{\log(2)}{\log(1+r)}$$ con $\log(2) \simeq \frac{7}{10}$ e SVILUPPO DI TAYLOR AL I° ORDINE $\log(1+r) \simeq r$ } ⇒ quindi

$$t \simeq \frac{7}{10} \times \frac{1}{r}$$ → se $r = 10\%$ $\quad t \simeq \frac{7}{10} \times \frac{1}{0.1} \simeq 7$ $\qquad$ se $r = 7\%$ $\quad t \simeq \frac{7}{10} \times \frac{1}{0.07} = 10$

REGOLA: "Una somma di denaro investita al 7% annuo raddoppia in circa 10 anni mentre, una somma investita al 10% annuo raddoppia in circa 7 anni"

→ LEGGE INTERESSE COMPOSTO CON CAPITALIZZAZIONE PERIODICA

Non sempre l'interesse è calcolato e versato nel conto al termine di ogni anno e anzi nella maggior parte dei casi si calcola e paga l'interesse con frequenza maggiore che può essere trimestrale, mensile, giornaliera.

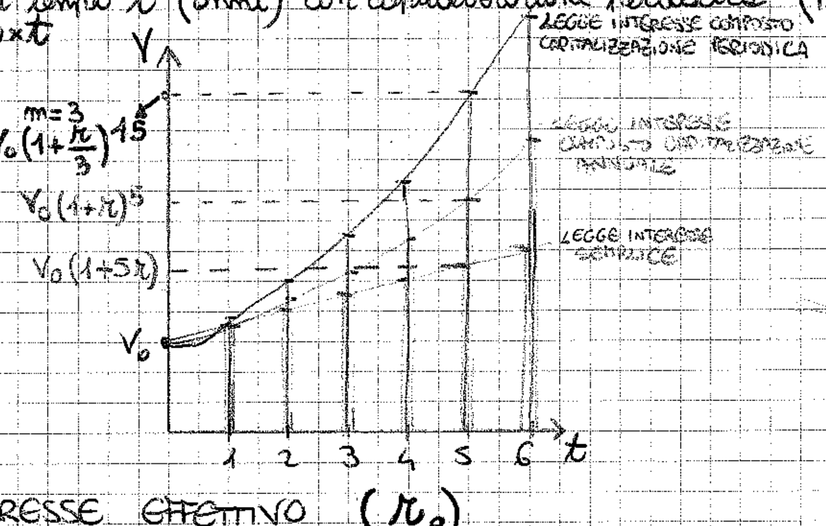
La capitalizzazione può avvenire con qualsiasi frequenza e il metodo generale consiste nel suddividere un anno in un numero stabilito di periodi di uguale durata (m periodi)

Se r è il tasso di interesse annuo (nominale), il tasso di interesse per ciascuno degli m periodi è r/m

In un periodo il conto cresce di $\left(1+\frac{r}{m}\right)$ e dopo un anno composto da m periodi l'incremento è di $\left(1+\frac{r}{m}\right)^m$

In generale dopo un tempo t (anni) con capitalizzazione periodica (m) vale:

$$V_t = V_0\left(1+\frac{r}{m}\right)^{m \times t}$$



→ TASSO DI INTERESSE EFFETTIVO (r_e)

Il TASSO DI INTERESSE EFFETTIVO (r_e) è quel tasso di interesse annuo che produce lo stesso risultato di un differente tasso di interesse (TASSO NOMINALE) con capitalizzazione periodica.

Se ad esempio il tasso di interesse nominale è $r = 8\%$ con capitalizzazione periodica semestrale $m = 2$ allora sappiamo che dopo t anni il valore sarà $V_0\left(1+\frac{r}{m}\right)^{m\,t}$. Nel caso invece di capitalizzazione annuale avremo che $V_0(1+r)^t$. Dato che vogliamo che il tasso di interesse di quest'ultima renda equivalenti i valori e prende il nome di tasso di interesse effettivo (r_e) allora $\cancel{V_0}\left(1+\frac{r}{m}\right)^{mt} = \cancel{V_0}(1+r_e)^t$

e quindi $r_e = \left(1+\frac{r}{m}\right)^m - 1$ che con i nostri dati equivale a $r_e = 8.16\%$

"Un tasso di interesse nominale dell'8% con accredito semestrale corrisponde ad un tasso dell'8.16% con accredito annuale"

ES. CALCOLARE IL TASSO DI INTERESSE NOMINALE CON CAPITALIZZAZIONE COMPOSTA E ACCREDITO DEGLI INTERESSI m VOLTE L'ANNO CORRISPONDENTE AD UN TASSO EFFETTIVO r_e ($r_e = 10\%$, $m=3$, $m=12$, $m=\infty$)

$$V_0(1+r_e)^t = V_0\left(1+\frac{r}{m}\right)^{mt} \Rightarrow (1+r_e) = \left(1+\frac{r}{m}\right)^m \Rightarrow 1+\frac{r}{m} = \sqrt[m]{(1+r_e)} \Rightarrow$$

$$r = \left[\sqrt[m]{(1+r_e)} - 1\right] m$$

$m=3$ $\quad r = 0.0968 = 9.68\%$

$m=12$ $\quad r = 0.0957 = 9.57\%$

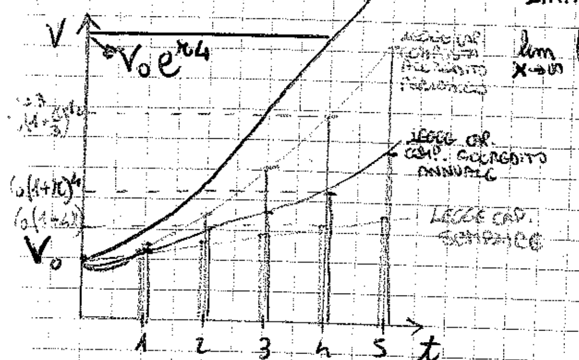
$m=\infty$ $\quad \lim_{m\to\infty}\left[(1+r_e)^{1/m} - 1\right] m = \log(1+r_e)$

→ CAPITALIZZAZIONE CONTINUA

Immaginiamo di suddividere l'anno in periodi sempre più piccoli e di applicare la capitalizzazione ogni minuto o ogni secondo; questo conduce all'idea di capitalizzazione continua.
Per determinare l'effetto della capitalizzazione continua consideriamo il limite dell'usuale capitalizzazione al tendere all'infinito del numero m di periodi in un anno.

$$\lim_{m\to\infty} V_0\left(1+\frac{r}{m}\right)^{mt} = V_0 \lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{r}{m}\right)^{mt} = V_0\, e^{rt}$$

⇒ Dopo un tempo t con un tasso di interesse pari a r la capitalizzazione continua produce tale valore



LIMITE NOTEVOLE

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^x = e^a$$

È possibile notare come la curva del valore per la legge di capitalizzazione continua stia sempre sopra rispetto alle 3 precedenti e soprattutto alla legge di capitalizzazione semplice che sappiamo invece essere superiore per $t<1$ rispetto alle curve di capitalizzazione composta con accredito sia annuale che periodico

SVILUPPO TAYLOR

$$e^{rt} = 1 + rt + \frac{(rt)^2}{2} + \frac{(rt)^3}{3!} > 1 + rt$$

perché composto da un'ulteriore parte positiva

→ VALORE ATTUALE

Sappiamo che il denaro investito oggi raggiunge un valore maggiore nel futuro per effetto dello interesse. Possiamo invertire questo concetto rispetto al tempo per calcolare il valore da assegnare oggi, nel presente, a una somma di denaro che verrà ricevuta in un momento successivo; è questa l'essenza del concetto di VALORE ATTUALE. Una simile trasformazione si applica agli impegni futuri come la restituzione del debito: calcolare il valore attuale del debito significa determinare quanto denaro sarebbe necessario OGGI per poterlo saldare.
La valutazione dei debiti futuri in termini di valore attuale equivalente è detta anche SCONTO
Poiché il valore attuale di un importo monetario futuro è minore del valore nominale di tale importo, allora il valore futuro deve essere scontato per ottenere il valore attuale e il fattore per cui il valore futuro deve essere scontato è detto FATTORE DI SCONTO e dipende dalla particolare modalità di capitalizzazione.

FATTORE MONTANTE DI CAPITALIZZAZIONE $m(0,t)$ — FATTORE DI SCONTO $d(0,t)$

CON LEGGE DI CAPITALIZZAZIONE SEMPLICE $\quad V_t = V_0(1+rt) \Rightarrow V_0 = V_t \dfrac{1}{(1+rt)}$

CON LEGGE DI CAPITALIZZAZIONE COMPOSTA (ACCREDITO ANNUALE) $\quad V_t = V_0(1+r)^t \Rightarrow V_0 = V_t \dfrac{1}{(1+r)^t} = V_t\,(1+r)^{-t}$

CON LEGGE DI CAPITALIZZAZIONE COMPOSTA (ACCREDITO PERIODICO) $\quad V_t = V_0\left(1+\frac{r}{m}\right)^{tm} \Rightarrow V_0 = V_t \dfrac{1}{\left(1+\frac{r}{m}\right)^{tm}} = V_t\left(1+\frac{r}{m}\right)^{-tm}$

CON LEGGE DI CAPITALIZZAZIONE CONTINUA

$$V_t = V_0\, e^{rt} \Rightarrow V_0 = V_t \frac{1}{e^{rt}} = V_t\, e^{-rt}$$

IN GENERALE:

$$\underbrace{V_t = V_0\, m(0,t)}_{\text{ASSUME FORME DIVERSE A SECONDA DELLA SPECIFICA LEGGE DI CAPITALIZZAZIONE}} \Longrightarrow \text{SPOSTA POSTE DI DENARO NEL FUTURO}$$

$$V_0 = V_t \underbrace{\frac{1}{m(0,t)}}_{\text{FATTORE DI SCONTO } d(0,t)} \Longrightarrow \text{SPOSTA POSTE DI DENARO NEL PASSATO}$$

→ VALORE ATTUALE e VALORE FUTURO PER SUCCESSIONI DI FLUSSI DI CASSA

L'analisi che abbiamo condotto sull'effetto dell'interesse per un singolo deposito o prestito può essere estesa al caso in cui vi siano più flussi di cassa in momenti diversi, ovvero vi sia una successione di flussi di cassa.

• BANCA IDEALE

La BANCA IDEALE è la banca che ① applica lo stesso tasso di interesse tanto ai depositi quanto ai prestiti ② non addebita spese per il servizio e non applica commissioni alle transazioni ③ il tasso di interesse è lo stesso per capitali di qualsiasi entità.

Ciò però non implica che i tassi di interesse siano identici per tutte le transazioni e si potrebbe perciò avere che un deposito di durata maggiore offra un tasso di interesse superiore rispetto ad uno di durata inferiore. Se però la banca ha un tasso di interesse INDIPENDENTE DALLA DURATA DEL PERIODO A CUI SI APPLICA e se capitalizzato secondo le usuali leggi, questa è detta BANCA IDEALE COSTANTE e rappresenta il punto di riferimento per descrivere il mercato monetario pubblico.

→ VALORE FUTURO

Scegliamo la durata del ciclo di capitalizzazione e stabiliamo che un periodo abbia durata corrispondente a quella di questo ciclo. Assumiamo inoltre che al termine di ciascun periodo si verifichino dei flussi. Depositeremo immediatamente ciascun flusso ricevuto in una banca ideale costante (se il flusso è negativo lo copriremo ricevendo un prestito). Grazie alla definizione di banca ideale costante, il saldo finale del conto può essere determinato combinando i risultati dei singoli flussi.

Consideriamo la successione di flussi $(X_0, X_1, \dots, X_n)$: dopo n periodi il pagamento iniziale X_0 sarà salito a $X_0(1+r)^n$ con r tasso di interesse per periodo. Il successivo flusso X_1 del I° periodo sarà depositato nel conto per $n-1$ periodi e avrà un valore $X_1(1+r)^{n-1}$; il flusso X_2 frutterà interessi per $n-2$ periodi ed avrà un valore pari a $X_2(1+r)^{n-2}$. Il flusso finale X_n non frutterà alcun interesse rimanendo così X_n.

IN GENERALE: "Data la successione di flussi di cassa $(X_0, X_1, \dots, X_n)$ e il tasso di interesse r per ciascun periodo il valore futuro della successione è: $VF = X_0(1+r)^n + X_1(1+r)^{n-1} + \dots + X_n$

ovvero dato un CASH FLOW $(\underline{x}, \underline{t})$ il VALORE FUTURO IN T sarà dato da:

$$VF_T(\underline{x}, \underline{t}) = X_0\, m(t_0, T) + X_1\, m(t_1, T) + X_2\, m(t_2, T) + \dots + X_n\, m(t_n, T)$$

con $m(t_0, T) = (1+r)^{(T-t_0)}$, $m(t_1, T) = (1+r)^{(T-t_1)}$

→ VALORE ATTUALE

Anche il valore attuale di una generica successione di flussi di cassa può essere calcolato valutando separatamente ciascun flusso. Consideriamo la successione di flussi $(x_0, x_1, \dots, x_m)$. Il valore attuale del primo flusso x_0 è semplicemente il valore stesso; il valore attuale del flusso x_1 è $\frac{x_1}{(1+r)}$ poiché deve essere scontato per 1 periodo e così via.

IN GENERALE: Data la successione di flussi di cassa $(x_0, x_1, \dots, x_m)$ e il tasso di interesse r per ciascun periodo, il valore attuale della successione è $VA = x_0 + \frac{x_1}{(1+r)} + \frac{x_2}{(1+r)^2} + \dots + \frac{x_m}{(1+r)^m}$

Ovvero dato un CASH FLOW $(\underline{x}, \underline{t})$ il VALORE ATTUALE in 0 sarà dato da:

$$VA_0(\underline{x}, \underline{t}) = x_0\, d(0, t_0) + x_1\, d(0, t_1) + \dots + x_m\, d(0, t_m)$$

con $d(0, t_1) = \frac{1}{(1+r)^{t_1}} = (1+r)^{-t_1}$

→ VALORE ATTUALE e BANCA IDEALE

Sappiamo che è possibile usare una banca ideale per modificare una successione di flussi di cassa; una banca che applica il tasso del 10% può trasformare la successione $(1, 0, 0)$ in $(0, 0, 1.21)$ ricevendo cioè in deposito 1 € e restituendo capitale e interesse per un totale di 1.21 € tra 2 anni

In generale se una banca può trasformare un cash flow $\underline{X} = (x_0, x_1, \dots, x_m)$ in un altro cash flow $\underline{Y} = (y_1, y_2, \dots, y_m)$ allora può anche eseguire la trasformazione inversa

DUE SUCCESSIONI o CASH FLOW che possono essere trasformate l'una nell'altra si dicono **EQUIVALENTI**

Consideriamo ad esempio il seguente cash flow

$\underline{X} = (100, 0, 0)$ (detenere 100 oggi) Se in presenza di Banca ideale e $r = 10\%$ allora il flusso $\underline{Y}$ sarà equivalente

$\underline{R} = (-100, 110, 0)$

$\underline{Y} = (0, 110, 0)$ (investo 100 oggi e ottengo 110 l'anno successivo)

$\underline{K} = (0, -100, 110)$

$\underline{Z} = (0, 10, 110)$ (investo 100 oggi, ottengo 10 l'anno successivo mantenendo 100 investiti e ottengo 110 al terzo anno)

Possiamo cioè eseguire delle operazioni di investimento che li porti ad essere considerati equivalenti.

Abbiamo ottenuto i diversi cash flow attraverso la somma vettoriale perché giustamente il cash flow è descritto da uno specifico scadenzario $(\underline{X}, \underline{t}) = (x_0, x_1, \dots, x_m) | (t_0, t_1, \dots, t_m)$

Occorre tenere a mente che i diversi cash flow sono vettori quindi è possibile esprimere delle loro COMBINAZIONI LINEARI $\underline{X} + \underline{Y} \Rightarrow \alpha \underline{X} + \beta \underline{Y} = (\alpha x_1 + \beta y_1, \alpha x_2 + \beta y_2, \dots, \alpha x_m + \beta y_m)$

Riguardo invece il calcolo del VA di un cash flow $\underline{x}$ in un generico istante t allora sarà dato da:

$$VA_t(\underline{x}) = \overbrace{x_0\, d(t, t_0) + x_1\, d(t, t_1) + x_2\, d(t, t_2) + \dots + x_m\, d(t, t_m)}^{\text{PRODOTTO SCALARE TRA VETTORE } \underline{X} \text{ e VETTORE DEL FATTORE DI SCONTO}}$$

con $d(t, t_m) = \frac{1}{(1+r)^{t_m - t}} = (1+r)^{-(t_m - t)}$

- se $t_m > t \Rightarrow$ FATTORE DI SCONTO
- se $t > t_m \Rightarrow$ FATTORE MONTANTE

Volendo ad esempio calcolare il VA in 0 del cash flow ($\underline{K}$) avremo: $[\underline{K} = (0, -100, 110)]$

$$VA_0(\underline{K}) = 0 \cdot d(0,0) + [-100 \cdot d(0,1)] + 110 \cdot d(0,2) \qquad r = 10\%$$

$$= 0 \cdot (1+r)^0 + [-100 \cdot (1+r)^{-1}] + 110 \cdot (1+r)^{-2} = 0$$

ma è possibile scrivere: $= 0 + (1+r)^{-1} \underbrace{[-100 + 110 \cdot (1+r)^{-1}]}_{= 0}$

Quest'ultima scrittura è utile se risulta difficile scontare per un preciso istante di tempo offrendoci la possibilità di scontare ad un preciso istante t per poi scontare questo risultato in 0

Essendo possibile esprimere le combinazioni lineari di differenti cash flow allora avremo:

$$VA(\alpha \underline{X} + \beta \underline{Y}) = \alpha\, VA(\underline{X}) + \beta\, VA(\underline{Y}) \qquad [\beta = -1 \text{ faccio la differenza}]$$

Ora sapendo dall'esempio sopra che il cash flow $\underline{X}$ può essere trasformato in $\underline{Y}$ sommandoci $\underline{h}$ e cioè $\underline{Y} = \underline{X} + \underline{h}$ allora $VA(\underline{Y}) = VA(\underline{X} + \underline{h}) = VA(\underline{X}) + VA(\underline{h})$

$$\left.\begin{array}{ll} \underline{X} = (100, 0, 0) & VA(\underline{X}) = 100 \\ \underline{h} = (-100, 110, 0) & VA(\underline{h}) = -100 + 100 = 0 \\ \underline{Y} = (0, 110, 0) & \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{c} VA(\underline{Y}) = VA(\underline{X}) + VA(\underline{h}) \\ 100 = 100 + 0 \end{array}$$

Cioè per ottenere un cash flow equivalente occorre sommarci un cash flow con V.A. pari a zero

DEF. Due flussi $\underline{X}$ e $\underline{Y}$ sono EQUIVALENTI quando hanno lo stesso valore attuale

TEOREMA

Due flussi $\underline{X}$ e $\underline{Y}$ sono equivalenti SE e SOLO SE esiste un flusso $\underline{h}$, con $VA(\underline{h}) = 0$, tale che $\underline{Y} = \underline{X} + \underline{h}$

DIM.

- Se $\underline{X}$ e $\underline{Y}$ sono equivalenti allora $VA(\underline{X}) = VA(\underline{Y})$. Definisco $\underline{h}$ come $\underline{Y} - \underline{X}$ e cioè $\underline{h} = \underline{Y} - \underline{X}$ quindi $VA(\underline{h}) = VA(\underline{Y}) - VA(\underline{X}) = 0$

- Supponiamo che $\underline{Y} = \underline{X} + \underline{h} \Rightarrow VA(\underline{Y}) = VA(\underline{X}) + \underbrace{VA(\underline{h})}_{\text{UGUALE A 0 PER IPOTESI}} \Rightarrow VA(\underline{Y}) = VA(\underline{X})$

Def. UN FLUSSO $\underline{X}$ è EQUO rispetto al tasso r se $VA(\underline{X}) = 0$

Def. UN FLUSSO $\underline{X}$ è VANTAGGIOSO rispetto al tasso r se $VA(\underline{X}) > 0$

Def. UN FLUSSO $\underline{X}$ è SVANTAGGIOSO rispetto al tasso r se $VA(\underline{X}) < 0$

- CONFRONTO TRA FLUSSO $\underline{X}$ e FLUSSO $\underline{Y}$ (definiti su qualsiasi scadenzario e rispetto ad r fissato)

① Calcolo i VA nello stesso istante di tempo $VA_0(\underline{X})$, $VA_0(\underline{Y})$

② Confronto i VA
- SE $VA_0(\underline{X}) = VA_0(\underline{Y}) \Rightarrow$ i flussi sono equivalenti e li possiamo cioè scambiare
- SE $VA_0(\underline{X}) > VA_0(\underline{Y}) \Rightarrow$ è conveniente prendere $\underline{X}$. Inoltre partendo da $\underline{X}$, posso mangiare la differenza tra $VA(\underline{X})$ e $VA(\underline{Y})$ e il restante lo trasformo in $\underline{Y}$ *

* $\underline{X}, \underline{Y}$ $VA_0(\underline{X}) > VA_0(\underline{Y})$ considero un altro flusso $\underline{X}' = (X_0 - [VA_0(\underline{X}) - VA_0(\underline{Y})], X_1, X_2, \dots, X_m)$

allora $VA_0(\underline{X}') = VA_0(\underline{X}) - VA_0(\underline{X}) + VA_0(\underline{Y}) = VA(\underline{Y})$ cioè $\underline{X}'$ e $\underline{Y}$ SONO EQUIVALENTI

- SE $VA_0(\underline{X}) < VA_0(\underline{Y}) \Rightarrow$ conviene prendere $\underline{Y}$ e fare la stessa cosa di prima con $\underline{X}$

→ METODO CALCOLO V.A. PER FLUSSI DI CASSA A RATA COSTANTE

Dato un cash flow del tipo $(R, R, R, \dots, R) | (0, 1, 2, \dots, n)$ allora il valore attuale per tale flusso può essere calcolato come: $VA_0 = R + R(1+r)^{-1} + R(1+r)^{-2} + \dots + R(1+r)^{-n}$ e definendo $d = (1+r)^{-1}$ $VA_0 = R + Rd + Rd^2 + \dots + Rd^n$ o ancora $VA_0 = R + R\sum_{k=1}^{n} d^k$

Il termine $\sum_{k=1}^{n} d^k$ è una SERIE GEOMETRICA per cui:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} d^k$$ MOLTIPLICO PER d

$$d\,S_n = \sum_{k=1}^{n} d^{k+1}$$ SOTTRAGGO LA SECONDA SERIE ALLA PRIMA

$$S_n - d\,S_n = \sum_{k=1}^{n} d^k - \sum_{k=1}^{n} d^{k+1}$$

$$S_n(1-d) = d - d^{n+1}$$

▶ Se $d=0 \Rightarrow r=0$ non opero alcuna operazione di sconto riportando le singole rate in $t=0$

▶ Se $d \neq 0$ → allora posso dividere per $(1-d)$

$$S_n(1-d) = d(1-d^n)$$

$$S_n = \frac{d}{(1-d)}(1-d^n)$$

$$\frac{d}{(1-d)} \to \frac{1}{r}$$

$$S_n = \frac{(1-d^n)}{r} \Longrightarrow VA_0 = R + R\boxed{\frac{(1-d^n)}{r}}$$ → a figurato n al tasso r $a_{\overline{n}|r}$

• Se il cash flow è del tipo $(0, R, R, \dots, R) | (0, 1, 2, \dots, n)$ allora avremo che il $VA_0 = R\, a_{\overline{n}|r}$ con $a_{\overline{n}|r} = \frac{(1-d^n)}{r}$ con la seguente relazione tra d e r:

$$d = \frac{1}{1+r} \Longleftrightarrow r = \frac{1}{d} - 1$$

• Se ci viene fornito un tasso annuo r_a ma il pagamento avviene attraverso rate biennali e cioè avremo il seguente cash flow $(0, 0, R, 0, R, 0, R, \dots, R) | (0, 1, 2, \dots, n)$ allora in questo caso avremo $d = (1+r)^{-2}$ con $r = \frac{1}{d} - 1$

↓ TASSO PERIODALE

tasso convertente con capitalizzazione biennale

Avendo ora ottenuto r applico la formula generale per il $VA_0 = R\, a_{\overline{n}|r}$

• Se ci viene fornito un tasso r_a annuo ma il pagamento avviene attraverso rate mensili e cioè avremo il seguente cash flow $(0, R, R, \dots, R) | (0, 1/12, 2/12, \dots, n)$ allora in questo caso avremo $d = \left(1 + \frac{r_a}{1/12}\right)^{-1/12}$ con $r = \frac{1}{d} - 1$ potendo così ora applicare $VA_0 = R\, a_{\overline{n}|r}$

→ VALUTAZIONE PROPOSTE DI INVESTIMENTO — CRITERI —

• **V.A.N.** (VALORE ATTUALE NETTO)

Consente di valutare le alternative classificandole in base ai rispettivi valori attuali; se si tratta quindi di una proposta di investimento più il VA è alto e più l'alternativa è vantaggiosa, mentre invece in caso contrario, ad esempio nel caso della restituzione di un debito, l'alternativa più vantaggiosa sarà quella con VA inferiore.

Questo criterio è piuttosto convincente e viene considerato come la migliore misura della bontà di un investimento; ha infatti il vantaggio che i valori attuali di investimenti diversi possono essere sommati ottenendo un dato aggregato significativo e questo perché il VA di una somma di successioni di flussi di cassa è uguale alla somma dei valori attuali dei corrispondenti flussi

• **T.I.R.** (TASSO INTERNO DI RENDIMENTO)

Il procedimento logico che è dietro al criterio del TIR è che più è ALTO IL TASSO INTERNO DI RENDIMENTO e PIÙ ATTRAENTE È L'INVESTIMENTO: UN POTENZIALE INVESTIMENTO o PROGETTO NON È PRESUMIBILMENTE DEGNO DI ESSERE CONSIDERATO A MENO CHE IL SUO TASSO INTERNO DI RENDIMENTO SIA MAGGIORE DEL TASSO DI INTERESSE PREVALENTE (PRATICATO DALLA BANCA IDEALE)

Il TASSO INTERNO DI RENDIMENTO è un concetto dei flussi di cassa che riguarda nello specifico l'intera successione di flussi associata ad un investimento.

Sappiamo che data una successione di flussi di cassa $(x_0, x_1, \dots, x_m)$ associata ad un investimento il VALORE ATTUALE per tale flusso sarà $VA = \sum_{k=0}^{m} \frac{x_k}{(1+r)^k}$ e se L'INVESTIMENTO CHE CORRISPONDE A TALE SUCCESSIONE È REALIZZATO CON UNA SERIE DI DEPOSITI E PRELIEVI DA UNA BANCA IDEALE CON TASSO DI INTERESSE r, ALLORA PER IL TEOREMA DEL VALORE ATTUALE, IL VA È PARI A ZERO

L'idea alla base del tasso interno di rendimento ribalta tale procedura

Data una successione di flussi di cassa, si scrive l'espressione del suo valore attuale e poi si determina il valore di r che lo rende uguale a zero

Sarà tale valore di r, chiamato TASSO INTERNO DI RENDIMENTO, perché è quel tasso di interesse determinato dalla struttura interna della successione.

IN GENERALE:

Data una successione di flussi di cassa $(x_0, x_1, \dots, x_m)$ il TASSO INTERNO DI RENDIMENTO di questa successione è il valore di r che soddisfa l'equazione $x_0 + \frac{x_1}{(1+r)} + \frac{x_2}{(1+r)^2} + \dots + \frac{x_m}{(1+r)^m} = 0$ e cioè quel valore di r che soddisfa $\frac{1}{1+r} = d \Rightarrow r = \frac{1}{d} - 1$ dove d soddisfa l'equazione polinomiale $x_0 + x_1 d + x_2 d^2 + \dots + x_m d^m$

Possiamo notare come il tasso interno di rendimento sia definito senza alcun riferimento ad un tasso di interesse prevalente ma sia determinato unicamente dai flussi di cassa della successione

L'equazione $X_0 + X_1 d + X_2 d^2 + \dots + X_n d^n = 0$ del TIR è un'equazione polinomiale in d di grado n che in generale non ha soluzione analitica ed è noto come un tale tipo di equazione ha da un minimo di 1 ad un massimo di n radici.

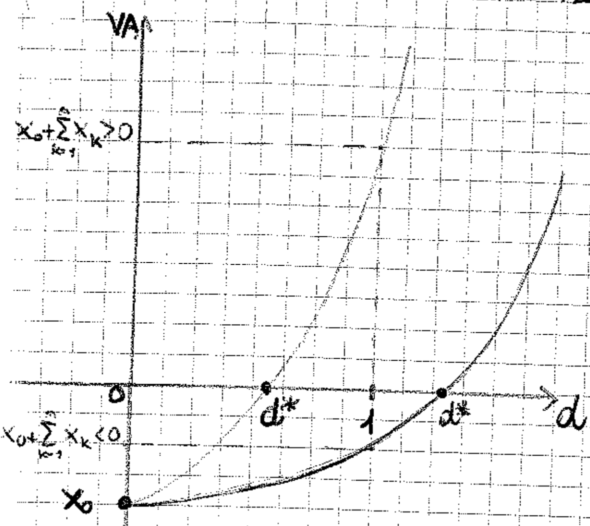
Per le forme più comuni di investimento, quelle costituite da un esborso iniziale seguito da più rimborsi positivi ESISTE SEMPRE UN'UNICA SOLUZIONE POSITIVA

→ TEOREMA FONDAMENTALE DEL TASSO INTERNO DI RENDIMENTO

Dato un flusso di cassa $(X_0, X_1, \dots, X_n)$ con $X_0 < 0$ e $X_k \geq 0$ per ogni K con $K=1, \dots, n$ con almeno un termine strettamente positivo allora l'equazione $X_0 + X_1 d + X_2 d^2 + \dots + X_n d^n = 0$ HA UN'UNICA SOLUZIONE POSITIVA

- Inoltre se $X_0 + \sum_{K=1}^{n} X_K > 0$ (cioè l'importo totale restituito supera l'investimento iniziale) allora il CORRISPONDENTE TASSO INTERNO DI RENDIMENTO è positivo poiché $0<d<1$ e sappiamo che $r = \frac{1}{d} - 1$

→ GRAFICO DELLA FUNZIONE AL VARIARE DI d



- $d = 0 \Longrightarrow X_0 < 0$
- $d = 1 \Longrightarrow X_0 + \sum_{K=1}^{n} X_K > 0$ PER IPOTESI

— È funzione crescente perché la derivata rispetto a d è >0

Poiché $X_0 + \sum_{K=1}^{n} X_K > 0 \Longrightarrow d^* < 1 \Rightarrow r^* = \frac{1}{d^*} - 1 > 0$

Se invece avessimo $X_0 + \sum_{K=1}^{n} X_K < 0$ $d^* > 1$ e $r^* = \frac{1}{d^*} - 1 < 0$

TIR NEGATIVO

→ TITOLI A RENDIMENTO CERTO - CAP. III -

Come sappiamo il tasso di interesse di mercato rappresenta un termine di paragone immediato per le alternative di investimento che producono flussi di cassa ma il mercato generale associato ai tassi di interesse è più complesso dei semplici conti bancari considerati precedentemente.
Infatti in un mercato monetario sviluppato esiste un vasto assortimento di elementi che non sono beni concreti dotati di valore intrinseco e vengono scambiati solo in forma cartacea o come voci di un database e chiamati STRUMENTI FINANZIARI. Il loro valore deriva dagli impegni che rappresentano. Se per questi strumenti esiste un mercato sviluppato che consente di scambiarlo liberamente vengono chiamati TITOLI

I TITOLI A RENDIMENTO CERTO sono strumenti finanziari che vengono scambiati in mercati sviluppati e promettono al possessore un rendimento certo in un arco di tempo, cioè rappresentano il diritto a una determinata successione di flussi di cassa

- MERCATO DEI FLUSSI DI CASSA FUTURI

Se prima l'unica incertezza associata ad un titolo a reddito certo era la possibilità che l'emittente di un titolo risultasse INADEMPIENTE, oggi alcuni titoli a rendimento certo promettono flussi di cassa di entità legate a varie contingenze.
In generale, un titolo a rendimento certo è caratterizzato da una successione di flussi di cassa prestabilita, ma suscettibile di variazioni dovute a fattori contingenti ben definiti.

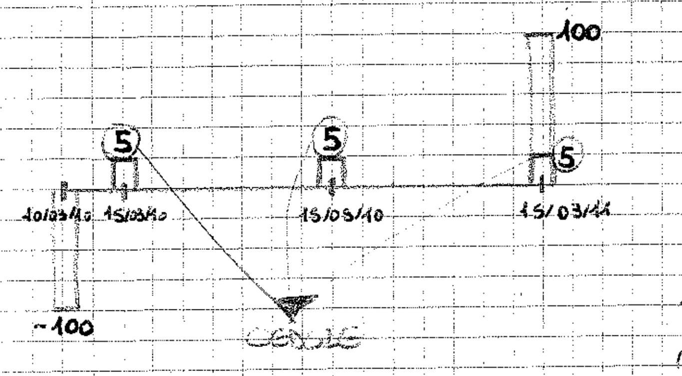
- TIPOLOGIE

Principalmente consideriamo tra i TITOLI A RENDIMENTO CERTO i DEPOSITI BANCARI (nei quali ignoriamo il rischio di DEFAULT) e i TITOLI OBBLIGAZIONARI (che obbligano l'emittente a rimborsare un certo flusso all'acquirente).
Tra i TITOLI OBBLIGAZIONARI distinguiamo due principali categorie:

- CON CEDOLA (importo pagato periodicamente prima della scadenza)

detti anche OBBLIGAZIONI CHE STACCANO CEDOLA o COUPON BOND che pagano cedola ogni 6 mesi nella maggioranza dei casi
Tra i coupon bond distinguiamo i BTP e i CCT (la cedola è a tasso variabile)
es. BTP scadenza 15 marzo 2011 TAN = 10% capitale nominale 100

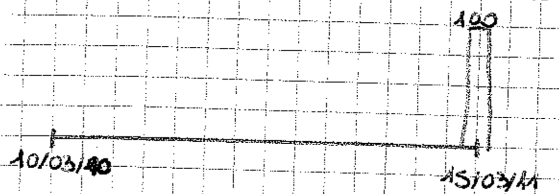
TASSO SEMESTRALE = 5%



Notiamo come l'importo della cedola sia indicato come percentuale del valore nominale. Solitamente le obbligazioni vengono emesse con cedole dai tassi prossimi al tasso di interesse prevalente venendo così vendute a prezzi vicini al valore nominale.

- SENZA CEDOLA per i quali è prevista la restituzione del capitale nominale alla scadenza detti anche ZERO COUPON BOND tra i quali annoveriamo i BOT e i CTZ

es. BOT scadenza 15 marzo 2011



Sia per le obbligazioni con cedola o COUPON BOND che per quelle senza cedola o ZERO COUPON BON vengono solitamente espressi 2 prezzi:

- BID-PRICE (prezzo denaro) quello che gli operatori sono disposti a pagare per l'obbligazione e cioè rappresenta il prezzo al quale l'obbligazione può essere immediatamente venduta
- ASK-PRICE (prezzo lettera) è quello a cui gli operatori sono disposti a vendere l'obbligazione e cioè rappresenta il prezzo al quale è immediatamente possibile acquistarla

→ RENDIMENTO

Il RENDIMENTO di un'obbligazione è il tasso di interesse determinato implicitamente dalla struttura dei pagamenti ovvero è IL TASSO DI INTERESSE CHE RENDE IL VALORE ATTUALE DELLA SUCCESSIONE DI PAGAMENTI ESATTAMENTE PARI AL PREZZO ATTUALE

- Un titolo quota ALLA PARI quando il suo VALORE NOMINALE è pari a 100
- Un titolo quota SOTTO LA PARI quando il suo VALORE NOMINALE è inferiore a 100
- Un titolo quota SOPRA LA PARI quando il suo VALORE NOMINALE è superiore a 100

* Il tasso cedolare (TAN) tale per cui un BTP è quotato alla pari è IL TASSO DI PARITÀ e coincide con il TASSO EURIRS o TASSO SWAP

Il TIR di un'obbligazione è un tasso importante nel confronto tra diversi titoli obbligazionari perchè fondare il confronto sulla base del prezzo non è molto indicativo.

TIR per obbligazioni → RENDIMENTO → YIELD

→ CALCOLO RENDIMENTO BOT

Essendo il rendimento definito come il tasso di interesse che rende il valore attuale della successione di pagamenti esattamente pari al prezzo attuale allora possiamo scrivere

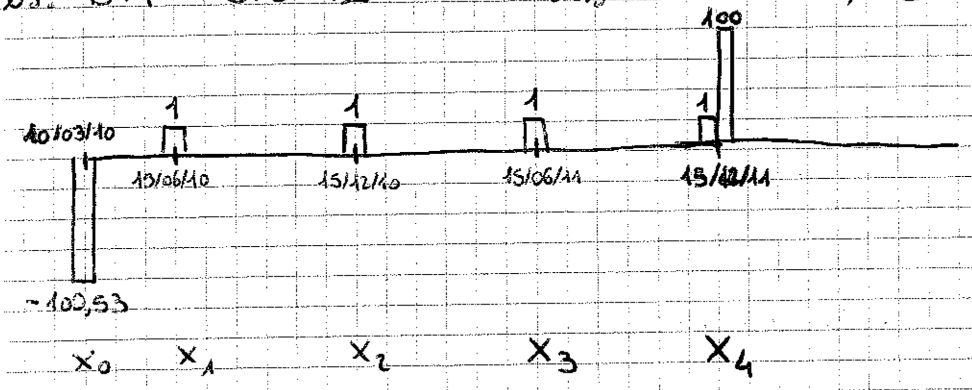
$$P = 100(1+y)^{-t} \Longrightarrow \overset{TIR}{y} = \left(\frac{P}{100}\right)^{-\frac{1}{t}} - 1$$

es. BOT 14 GEN 11 PREZZO SOTTOSCRIZIONE = 99.393

$$y = \left(\frac{99.393}{100}\right)^{-\frac{365}{340}} - 1 = 0.66\%$$

→ CALCOLO RENDIMENTO BTP

es. BTP DIC 12 TAN 2% P= 100,53 OGGI 10/03/2011



→ CALCOLO RENDIMENTO DI UN'OBBLIGAZIONE CHE QUOTA ALLA PARI

(CONSIDERIAMO PAGAMENTI ANNUALI)

Supponiamo che il cash flow associato a tale obbligazione sia

$$(-C, I, I, I, ..., C+I)$$ allora il VA di tale flusso sarà pari a

$$-C + I\sum_{k=1}^{m} d^k + C d^m = 0$$

$$a_{\overline{m}|r} = \frac{1-d^m}{r}$$

$$-C + I\frac{1-d^m}{r} + C d^m = 0 \Rightarrow I\frac{1-d^m}{r} - C(1-d^m) = 0$$

$$I\frac{\cancel{1-d^m}}{r} = C\,\cancel{(1-d^m)} \Longrightarrow r = \frac{I}{C}$$

il TIR deve essere uguale al rapporto tra la cedola e il capitale

es. BTP TAN 8% $C = 100 \Rightarrow I_{\text{pagate semestralmente}} = \frac{8}{2} = 4$ → $r_a = 8.16\%$ → $\bar{r}_a = 8\%$

$$r_s = \frac{4}{100} = 4\%$$ è riferito alla lunghezza temporale del semestre

• RIPORTARE QUESTO TASSO "SEMESTRALE" AL TASSO EFFETTIVO ANNUO

$$r_a : (1+r_a) = (1+r_s)^2 \Rightarrow r_a = (1+r_s)^2 - 1$$

TIR CON CAPITALIZZAZIONE ANNUALE DEGLI INTERESSI

• CALCOLO TIR CON CAPITALIZZAZIONE SEMESTRALE DEGLI INTERESSI

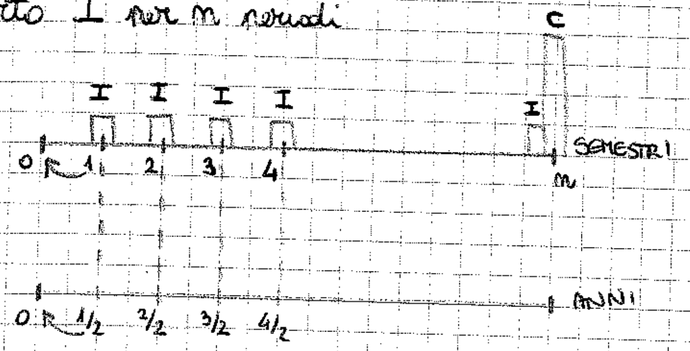
$$\left(1+\frac{\bar{r}_a}{2}\right)^2 = (1+r_s)^2 \Rightarrow \bar{r}_a = 2 r_s$$

→ CALCOLO DEL PREZZO DI UN'OBBLIGAZIONE DATO LO YIELD TO MATURITY (λ)
↳ ANNUALE

DEF. YIELD TO MATURITY

Data un'obbligazione che paga cedole m volte l'anno, lo YTM è il TIR (con accredito degli interessi m volte l'anno) dell'operazione di acquisto dell'obbligazione al prezzo di mercato, assumendo di tenerla fino alla scadenza

Data un'obbligazione con valore nominale C che prevede ogni anno m cedole di importo I per n periodi



$$d=\left(1+\frac{\lambda}{2}\right)^{-1} \qquad P = I\underbrace{\sum_{k=1}^{n} d^k}_{\text{SERIE GEOMETRICA}} + C\,d^n$$

$$\text{SERIE GEOMETRICA} \rightarrow a_{\overline{n}|\lambda/2} = \frac{1-d^n}{\lambda/2}$$

$$P = I\,\frac{1-d^n}{\lambda/2} + C\,d^n$$

IN GENERALE:

$$P = I\,\frac{1-d^n}{\lambda/m} + C\,d^n$$

→ NATURA QUALITATIVA DELLE CURVE PREZZO-RENDIMENTO

Ricordando l'equazione delle obbligazioni: $P = I\,\frac{1-d^n}{\lambda/m} + C\,d^n$ attraverso l'analisi qualitativa possiamo comprendere la relazione tra prezzo, rendimento, cedola e durata residua dell'obbligazione.

La regola generale è che I RENDIMENTI DELLE OBBLIGAZIONI E I TASSI DI INTERESSE DI ALTRI TITOLI A RENDIMENTO CERTO TENDONO AD ESSERE PIUTTOSTO SIMILI.

L'intero mercato dei tassi di interesse esercita una pressione su ciascuna obbligazione, premendo perché il suo rendimento sia in sintonia con quello delle altre obbligazioni

L'unico modo in cui il rendimento di un'obbligazione può variare è tramite la variazione del prezzo dell'obbligazione stessa; quando il rendimento varia, i prezzi si muovono di conseguenza

LA VARIAZIONE DI PREZZO NECESSARIA PER PRODURRE UNA DETERMINATA VARIAZIONE DEL RENDIMENTO DIPENDE DALLA STRUTTURA DELL'OBBLIGAZIONE (TASSO DELLE CEDOLE e DURATA).

Quindi anche se i rendimenti delle diverse obbligazioni si muovono più o meno in armonia, i loro prezzi variano di importi differenti.

Quindi per capire le obbligazioni occorre comprendere questa relazione tra prezzo e rendimento, illustrata graficamente dalla CURVA PREZZO-RENDIMENTO

Tale curva ha ovviamente inclinazione negativa, che indica che prezzo e rendimento sono inversamente proporzionali: SE IL RENDIMENTO CRESCE, IL PREZZO DIMINUISCE.

Graficare una curva PREZZO-INVESTIMENTO consiste essenzialmente nel calcolare alcuni suoi punti caratteristici:

esaminiamo ad esempio un'obbligazione che etichetteremo 10% per la quale supporremo una cedola del 10% TAN (ogni anno viene pagato il 10% del suo valore nominale oppure il 5% ogni 6 mesi) e una durata di 30 anni. LA CURVA PREZZO-RENDIMENTO MOSTRA LA RELAZIONE TRA PREZZO E RENDIMENTO DI QUESTA OBBLIGAZIONE.

Supponiamo che YTM = 0 ovvero è COME SE, AL PREZZO A CUI VIENE VENDUTA, L'OBBLIGAZIONE NON FRUTTASSE INTERESSI e quindi IL DENARO FUTURO NON VIENE SCONTATO

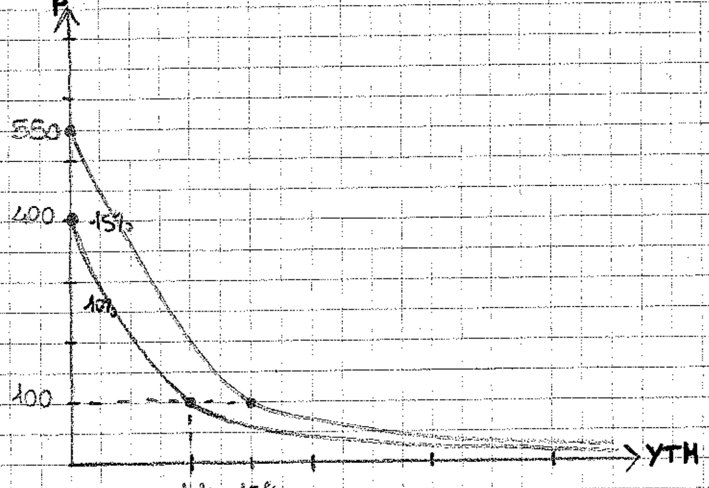
In questa situazione il valore attuale dell'obbligazione è semplicemente pari alla somma dei pagamenti ovvero cedole annuali di 10 punti per 30 anni più il 100% del valore nominale alla scadenza in totale 400, valore di questa obbligazione se il rendimento è zero.

Supponiamo ora che YTM = 10%. Allora IL VALORE DELL'OBBLIGAZIONE È UGUALE AL VALORE NOMINALE, PERCHÈ OGNI ANNO LA CEDOLA È UGUALE AL RENDIMENTO ATTESO DELLO INVESTIMENTO (10% = TAN). Allora il VALORE NOMINALE RIMANE 100 OGNI ANNO

In questo caso RENDIMENTO = CEDOLA ⟹ OBBLIGAZIONE ALLA PARI

Consideriamo infine come si comporti la curva se YTM → ∞. In questo caso possiamo dedurre che il PREZZO DELL'OBBLIGAZIONE tenda a zero: UN ALTO RENDIMENTO IMPLICA UNO SCONTO CONSISTENTE (nel caso limite pari a 0) annullando così tutte le attualizzazioni cedolari.

Concludiamo così come la curva sia complessivamente CONVESSA, piegata verso l'origine e distesa lungo l'asse delle ascisse.



Rappresentiamo ora l'obbligazione 15% con cedola del 15% sempre a 30 anni

Se YTM = 0 allora il prezzo sarà pari alla somma di 30 cedole del valore di 15 ovvero 450 più il 100% del valore nominale alla scadenza per un totale di 550

Se YTM = 15 il valore dell'obbligazione è uguale al valore nominale pari a 100

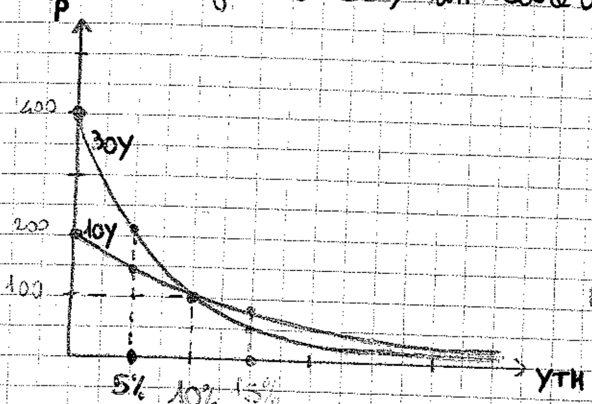
È possibile da subito constatare come la sensibilità del prezzo rispetto a variazioni del tasso di interesse sia maggiore per obbligazioni che pagano maggiore cedola

• EFFETTO DELLA DURATA SU OBBLIGAZIONI CON STESSA CEDOLA

Supponiamo di voler analizzare l'effetto del tempo rimanente alla scadenza considerando per l'appunto obbligazioni con cedole uguali ma con scadenze differenti: 30 anni e 10 anni.

Se ipotizziamo per queste una cedola del 10% (TAN = 10%) allora entrambe le obbligazioni SONO ALLA PARI quando il rendimento è del 10% (YTM = 10%) passando cioè per il medesimo punto di parità (10, 100) ma con inclinazioni diverse a seconda della scadenza.

Inoltre come nel caso precedente i valori per YTM = 0 sono calcolabili come somma semplice (NON SCONTATA) dei valori cedolari per la durata dell'obbligazione più il valore nominale, avendo così per l'obbligazione 30Y un valore di 400 e per quella 10Y un valore di 200.



La caratteristica principale è che all'aumentare della durata la CURVA-PREZZO-RENDIMENTO diventa più ripida mantenendo come fermo il punto di parità. Ciò vuol dire CHE DURATE MAGGIORI IMPLICANO MAGGIORE SENSIBILITÀ DEL PREZZO ALLE VARIAZIONI DEL RENDIMENTO

Supponiamo di aver acquistato le obbligazioni alla pari (100) con, come per ipotesi, una cedola del 10%. Se le condizioni del mercato cambiano e il rendimento dell'obbligazione passa al 5% notiamo come il prezzo di entrambe sia aumentato (maggiormente per 30Y) oltre al fatto che ora le obbligazioni pagano interessi maggiori rispetto a quelli praticati dal mercato.
Se tale situazione permane è conveniente quindi mantenere fino a scadenza l'obbligazione con durata maggiore.

Supponiamo invece ora che le condizioni di mercato producano un incremento del rendimento dell'obbligazione che passa al 15% notando una DIMINUZIONE DEL PREZZO (maggiore per 30Y) oltre al fatto che ora entrambe le obbligazioni pagano interessi minori rispetto a quelli praticati dal mercato. Se tale situazione permane è "conveniente" mantenere fino a scadenza l'obbligazione con durata inferiore.

BASIS POINT: $1\,bp = 0.0001 = 10^{-4}$

es. $2\% + 5\,bp = 0.02 + 0.005 = 0.025 \Rightarrow 2{,}5\%$

→ DURATION

Come visto, a parità di fattori, le obbligazioni di lunga durata hanno curve prezzo-rendimento più ripide di quelle con scadenza a breve termine ovvero i prezzi delle obbligazioni di lunga durata sono più sensibili alle variazioni del tasso di interesse rispetto a quelli delle obbligazioni di breve durata.

Ma la durata NON FORNISCE una misura quantitativa completa della sensibilità al tasso di interesse.

Un'indicazione diretta della sensibilità al tasso di interesse è fornita dalla DURATION o DURATA MEDIA FINANZIARIA, ovvero un'altra misura del tempo.

LA DURATION DI UNO STRUMENTO A RENDIMENTO CERTO È UNA MEDIA PONDERATA DEI TEMPI IN CUI I PAGAMENTI VENGONO EFFETTUATI e DOVE I COEFFICIENTI SONO I VALORI ATTUALI DEI SINGOLI PAGAMENTI

$$D_0(r) = \frac{t_1 x_1 d(0,t_1) + t_2 x_2 d(0,t_2) + \dots + t_m x_m d(0,t_m)}{x_1 d(0,t_1) + x_2 d(0,t_2) + \dots + x_m d(0,t_m)}$$

Come notiamo $D_0(r)$ è in effetti una media pesata dei tempi dei flussi di cassa ed è quindi espresso in unità di tempo

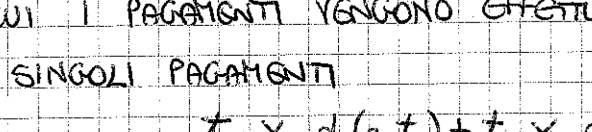
→ Se tutti i flussi di cassa sono non negativi $\Longrightarrow t_0 \leq D_0(r) \leq t_m$

→ OBBLIGAZIONI ZERO COUPON $\Longrightarrow D_0(r) = t_m$

→ OBBLIGAZIONI CON CEDOLE $\Longrightarrow D_0(r) < t_m$

→ CALCOLO DELLA DURATION

Supponiamo di avere il seguente flusso di cassa



con $x_k > 0$ $k = 0,1,\dots,m$ e r tasso annuale con capitalizz. annuale

allora $(1+r)^{-t} = d(0,t)$

$$VA_0(r) = x_1(1+r)^{-t_1} + x_2(1+r)^{-t_2} + \dots + x_m(1+r)^{-t_m}$$

Volendo evidenziare la sensibilità rispetto al tasso di interesse allora faccio la derivata di $VA_0(r)$ rispetto a r

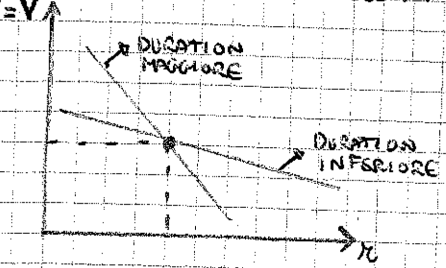
$$VA_0'(r) = x_1(-t_1)(1+r)^{-t_1-1} + x_2(-t_2)(1+r)^{-t_2-1} + \dots + x_m(-t_m)(1+r)^{-t_m-1}$$

$$= -(1+r)^{-1}\left[t_1 x_1 (1+r)^{-t_1} + t_2 x_2 (1+r)^{-t_2} + \dots + t_m x_m (1+r)^{-t_m}\right]$$ MOLT. e DIV per $VA_0(r)$

$$VA_0'(r) = -(1+r)^{-1} \frac{\left[t_1 x_1 (1+r)^{-t_1} + t_2 x_2 (1+r)^{-t_2} + \dots + t_m x_m (1+r)^{-t_m}\right]}{VA_0(r)} \; VA_0($$

$$D_0(r) = \frac{t_1 x_1 (1+r)^{-t_1} + t_2 x_2 (1+r)^{-t_2} + \dots + t_m x_m (1+r)^{-t_m}}{VA_0(r)} = \frac{t_1 x_1 d(0,t_1) + \dots + t_m x_m d(0,}{x_1 d(0,t_1) + \dots + x_m d(0,}$$

Dalla relazione tra DURATION e sensibilità del prezzo $VA_0'(r) = -(1+r)^{-1} D_0(r) V_0(r)$ notiamo come questa influenzi direttamente la pendenza della curva determinando così per elevati valori di Duration maggiore pendenza (negativa) e al contrario per bassi valori di duration minore pendenza (negativa)



È solito associare a maggiori valori di duration un rischio più elevato rispetto a duration inferiori.

→ DURATION DI MACAULAY

Ricordando la definizione generale di DURATION ovvero che se consideriamo il flusso $(x_1, x_2, \dots, x_m) | (t_1, \dots$ allora il VA del flusso in t_0, dato un fattore di sconto $d(t_0, t_k) = (1+r)^{-(t_k - t_0)}$ (INT. COMPOSTI CON CAPITAL. ANNUALE), è $V(t_0) = \sum_{k=1}^{m} X_k \, d(t_0, t_k)$ e la DURATION sarà:

$$D(t_0) = \frac{\sum_{k=1}^{m} (t_k - t_0) X_k \, d(t_0, t_k)}{V(t_0)} \qquad \text{con } V(t_0) \neq 0$$

ottenuta appunto partendo dal fatto che se $d(t_0, t_k) = (1+r)^{-(t_k - t_0)}$ allora

$$\frac{dV(t_0)}{dr} = -(1+r)^{-1} D(t_0) \cdot V(t_0)$$ ⇒ FLAT DURATION o DURATION CON STRUTTURA PIATTA perché utilizziamo lo stesso tasso per tutte le maturity

* Tale definizione risulta però vaga riguardo il tasso di interesse da utilizzare.
Nel caso in cui ci stiamo riferendo ad obbligazioni è NATURALE BASARE QUESTI CALCOLI SUL RENDIMENTO DELLE OBBLIGAZIONI STESSE, OVVERO SULLO YIELD TO MATURITY (λ)
Tale procedere dà luogo alla DURATION DI MACAULAY così definita:

- Per uno strumento finanziario che preveda m pagamenti l'anno, con I_k pagamento del periodo K e n periodi rimanenti allora

$$D = \frac{\sum_{k=1}^{n} K/m \; I_k \left(1 + \lambda/m\right)^{-k}}{VA}$$

con $\frac{K}{m}$ che rappresenta un tempo misurato in anni
con $VA = \sum_{k=1}^{n} I_k \left(1 + \lambda/m\right)^{-k}$

Se generalizzando consideriamo che gli n periodi rimanenti siano tutti i periodi degli m pagamenti allora $V(t_0) = P_0$ → PREZZO DI MERCATO DELL'OBBLIGAZIONE.

- CASI PARTICOLARI – DURATION TITOLO ZERO COUPON (BOT)

$$D = \frac{(t_1 - t_0) \cdot \cancel{100} \cdot \cancel{d(t_0, t_1)}}{\cancel{100}\, \cancel{d(t_0, t_1)}} = t_1 - t_0$$

Es. CALCOLO DURATION BOT SCADENZA TRA 2 ANNI

$$D = \frac{(2-0) \cdot \cancel{100} \cdot \cancel{d(0,2)}}{\cancel{100}\, \cancel{d(0,2)}} = 2$$

- TITOLO CON CEDOLA (BTP)

MEDIA PESATA DEL TEMPO CHE MANCA AL PAGAMENTO DELLA CEDOLA t_k

Possiamo definire la DURATION come $D(t_0)=\sum_{k=1}^{m}(t_k-t_0)\,P_k$ con

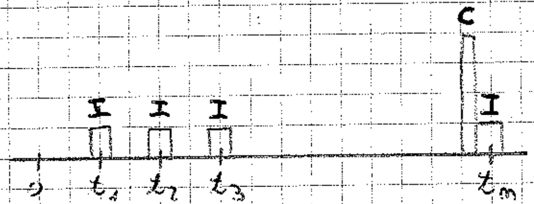
$$P_k=\frac{X_k\, d(t_0,t_k)}{V(t_0)}=\frac{V_0(X_k)}{V_0(\underline{X})}$$

$V_0(X_k) \rightarrow$ VALORE IN t_0 DI X_k

$V_0(\underline{X}) \rightarrow$ VALORE IN t_0 DEL FLUSSO

con le seguenti proprietà:

- $P_k \geq 0$ essendo obbligazioni ordinarie sono tutte positive
- $\sum_{k=1}^{m} P_k = 1$

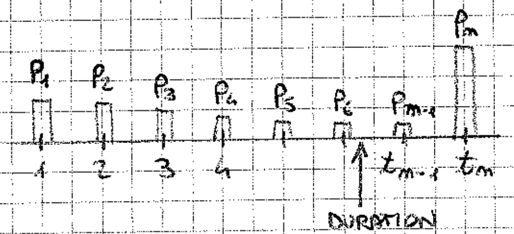


allora $P_1=\frac{I\, d(0,t_1)}{VA(\underline{X})} \longrightarrow P_1>P_2>\ldots>P_{m-1}$ perché $d(0,t_1)>d(0,t_2)$

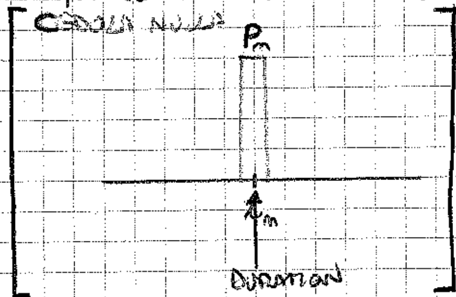
e $P_m=\frac{(I+C)\, d(0,t_m)}{VA(\underline{X})} \Longrightarrow P_m \gg P_1$ (in generale)

riportando graficamente i valori dei P_k con $k=1,2,\ldots,m$ allora possiamo interpretare la duration come il "BARICENTRO" dell'asse sulla quale poniamo i valori P_k

CON CEDOLA

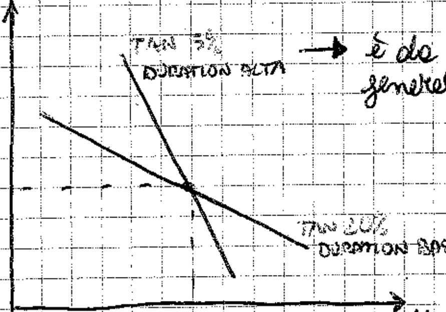


CEDOLA NULLA



Se consideriamo 2 BTP a 10 anni ma uno con cedola al 5% e l'altro con cedola al 20%, possiamo, sempre facendo riferimento all'esempio della duration come "BARICENTRO", vedere che si avrà MASSIMA DURATION se immaginiamo cedole prossime allo zero o comunque molto piccole, e minima duration se aumentiamo al massimo le cedole.

Quindi in generale se due BTP hanno la stessa durata, ma TAN differenti, quello con TAN maggiore (CEDOLE GRANDI) avrà una duration minore e quello con TAN inferiore avrà duration maggiore



TAN 5% DURATION ALTA $\rightarrow$ è da scegliere se pensiamo che i tassi di interesse scendano perché genererebbe un elevato guadagno

TAN 20% DURATION BASSA $\rightarrow$ è da scegliere per limitare il rischio legato a variazioni del tasso di interesse

→ DURATION DI UN PORTAFOGLIO

Supponiamo di detenere diversi titoli in quote differenti e di conoscere per ognuno la singola duration.

Considero le obbligazioni $\underline{a}$ e $\underline{b}$ il cui valore attuale e duration sono rispettivamente $VA(\underline{a})$, D_a e $VA(\underline{b})$, D_b. Consideriamo allora il portafoglio P composto da α quote di $\underline{a}$ e β quote di $\underline{b}$.

IL VALORE ATTUALE DI P è: $V_P = \alpha V(\underline{a}) + \beta V(\underline{b})$ calcolato come combinazione lineare rispetto alle quote dei due valori attuali

e

LA DURATION DI P si ottiene come MEDIA PESATA DELLE RISPETTIVE DURATION pesata rispetto alle rispettive quote possedute.

$$D_P = \frac{\alpha V(\underline{a})}{V(P)} D_a + \frac{\beta V(\underline{b})}{V(P)} D_b$$

→ QUANTIFICARE LA VARIAZIONE DEL VALORE DEL PORTAFOGLIO AL VARIARE DEL TASSO DI INTERESSE

Supponiamo che il valore attuale del mio portafoglio obbligazionario è $V_0 = 10000$ €, la Duration è di 4,5 anni e il tasso di rendimento (YTM) è del 2%.
Calcoliamo quale sarà il valore del portafoglio se r_0 aumenta di 50 bp = 0.005.

Ci stiamo chiedendo, e cerchiamo di calcolare, il valore attuale in corrispondenza di $r_0 + h$

APPROSSIMAZIONE CON SVILUPPO AL I° ORDINE

$$V(r_0+h) \approx V(r_0) + \underbrace{V'(r_0)}_{\text{[illegible]}} h$$

$$V(r_0+h) \approx V(r_0) - h \frac{D}{1+r} V(r_0) \Rightarrow \underbrace{\frac{V(r_0+h) - V(r_0)}{V(r_0)}}_{\text{VARIAZIONE DEL VALORE DEL PORTAFOGLIO}} \approx -h \frac{D}{1+r}$$

Nell'esempio $h = 0.005$, $r = 0.02$ e $D = 4.5$

$$\frac{V_P(2.5\%) - V_P(2\%)}{V_P(2\%)} \approx -0.005 \cdot \frac{4.5}{1.02} = -0.022$$

Il valore del portafoglio diminuirà del 2,2%

PROPRIETÀ QUALITATIVE DELLA DURATION

Per le obbligazioni con cedole la duration è sempre inferiore alla maturità, o scadenza, della obbligazione, ma meno è sorprendentemente lontana.

Una caratteristica è che AL TENDERE ALL'INFINITO DELLA SCADENZA, LA DURATION NON TENDE ALL'INFINITO MA AD UN LIMITE FINITO INDIPENDENTE DALLA CEDOLA

Inoltre essa non varia rapidamente rispetto alla cedola. Il fatto che il rendimento sia mantenuto costante tende ad annullare l'effetto delle cedole

IN GENERALE:

DURATION MOLTO ALTE SONO RAGGIUNTE SOLO DA OBBLIGAZIONI CHE HANNO CONTEMPORANEAMENTE SCADENZA MOLTO LUNGA e CEDOLA MOLTO BASSA

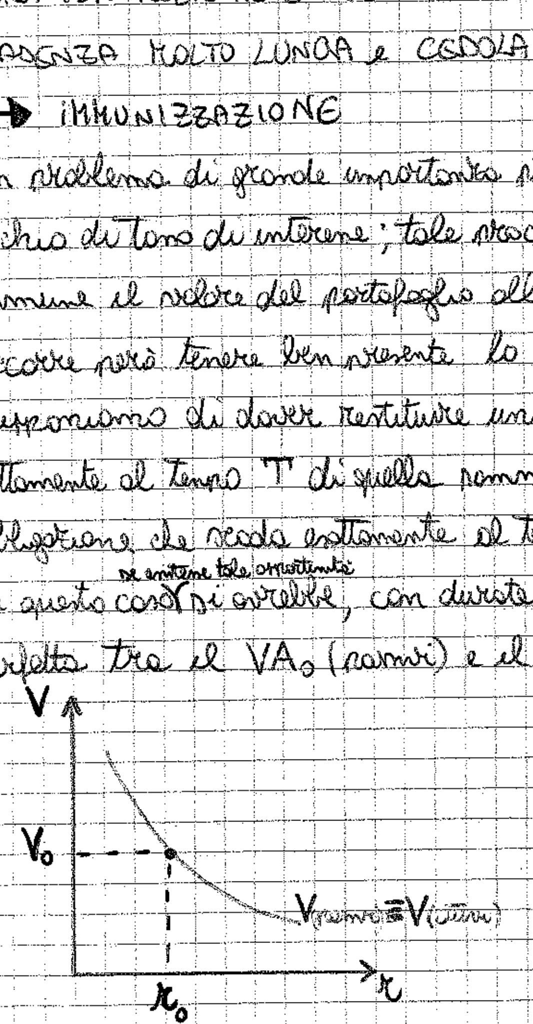
→ IMMUNIZZAZIONE

Un problema di grande importanza pratica è quello della composizione di un portafoglio protetto dal rischio di tasso di interesse; tale procedura prende il nome di IMMUNIZZAZIONE perché rende immune il valore del portafoglio alle variazioni del tasso di interesse.

Occorre però tenere ben presente lo scopo per cui occorre "immunizzare" il certo portafoglio.

Supponiamo di dover restituire una certa posta ad un tempo T e di voler capire come possiamo esattamente al tempo T di quella somma. L'ipotesi più semplice consisterebbe nell'acquistare una obbligazione che scada esattamente al tempo T, ma escludiamo l'esistenza di una tale opportunità.

In questo caso, se esistesse tale opportunità, si avrebbe, con durate e valori nominali esattamente uguali, la corrispondenza perfetta tra il VA_0 (passivi) e il VA_0 (attivi) per qualsiasi valore del tasso di interesse

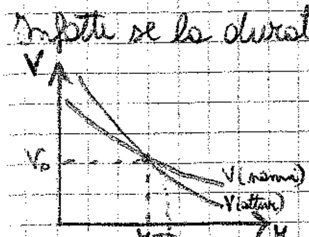


Questa situazione ideale di IMMUNIZZAZIONE PERFETTA o anche detta di PERFECT MATCHING è caratterizzata dal fatto che le due curve, V(attivi) e V(passivi) coincidono

Questa tecnica basata sull'equivalenza del valore attuale diventa problematica se il rendimento varia poiché tanto il flusso degli investimenti e cioè del portafoglio quanto il valore attuale del flusso dei debiti cambieranno di conseguenza ma, probabilmente in misure differenti e quindi il portafoglio non varrà più quanto i debiti e le due curve non coincideranno più.

Cercheremo allora di approssimare al I° ordine le due curve che quindi PRESENTERANNO LA STESSA DERIVATA il che vuol dire far corrispondere, oltre ai valori attuali, anche le DURATION.

Infatti se la duration del portafoglio corrisponde a quella della successione di debiti, il



valore di mercato del portafoglio e il valore attuale del flusso di debiti risponderanno in modo identico (FINO AL PRIMO ORDINE) alle variazioni del rendimento. Se il Rendimento aumenta, il valore attuale del portafoglio di titoli diminuisce, ma il valore attuale dei debiti diminuisce approssimativamente nella stessa misura; il valore del portafoglio rimane quindi adeguato alla copertura dei debiti.

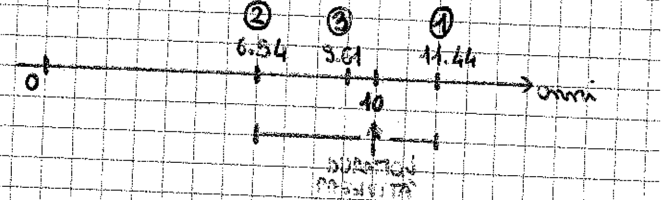
Possiamo allora descrivere la IMMUNIZZAZIONE FINANZIARIA come la risoluzione del seguente sistema:

$$\begin{cases} VA_0(\text{attivi}) = VA_0(\text{passivi}) \\ D_0(\text{attivi}) = D_0(\text{passivi}) \end{cases}$$

ESEMPIO

Una società deve pagare un debito di 1 Milione di € in 10 anni e intende investire oggi una somma di denaro sufficiente per saldare il debito nel futuro. La società può scegliere tra le tre seguenti obbligazioni societarie

	TAN	SCAD	P	YTM	D
1	6%	30Y	69.04	9%	11.44
2	11%	10Y	113.01	9%	6.54
3	9%	20Y	100.00	9%	9.61



La società valuta inizialmente l'utilizzo delle obbligazioni 2 e 3 e deve confrontare la duration delle passività (10 anni) con la media delle duration delle precedenti obbligazioni che già sappiamo non raggiungerà quella delle passività, essendo $D_2 = 6.54$ e $D_3 = 9.61$, e quindi la duration del portafoglio D_2, D_3 avrà sicuramente un valore compreso nel suddetto range.

La società decide allora di investire nelle obbligazioni **1** e **2**

Quanto deve investire nella obbligazione 1 e quanto nella obbligazione 2?

Il valore attuale del debito al 9% di interesse sarà:

$$V_{(passivi)} = 1\,000\,000\,(1+0.09)^{-10}$$

e indicheremo con $X \rightarrow$ quote acquistate dell'obbligazione 1

$Y \rightarrow$ quote acquistate dell'obbligazione 2

Impostiamo allora il problema di IMMUNIZZAZIONE FINANZIARIA:

$$\begin{matrix} V_{(attivi)} = V_{(passivi)} \\ D_{0(attivi)} = D_{0(passivi)} \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} X P_1 + Y P_2 = V_{(passivi)} \\ \dfrac{X P_1}{V_{(passivi)}} D_1 + \dfrac{Y P_2}{V_{(passivi)}} D_2 = D_P \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X(P_1) + Y(P_2) = (V_P) \\ X(P_1 D_1) + Y(P_2 D_2) = (D_P V_{P(passivi)}) \end{cases}$$

RISOLVIAMO CON IL METODO DI CRAMER:

$$\Delta = \begin{vmatrix} P_1 & P_2 \\ P_1 D_1 & P_2 D_2 \end{vmatrix} = P_1 P_2 D_2 - P_1 P_2 D_1 = P_1 P_2 (D_2 - D_1)$$

$$X = \frac{\begin{vmatrix} V_P & P_2 \\ D_P V_P & P_2 D_2 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{V_P P_2 D_2 - V_P P_2 D_P}{\Delta} = \frac{V_P P_2 (D_2 - D_P)}{\Delta} = \frac{V_P \cancel{P_2} (D_2 - D_P)}{P_1 \cancel{P_2} (D_2 - D_1)} = \frac{V_P (D_2 - D_P)}{P_1 (D_2 - D_1)}$$

$$Y = \frac{\begin{vmatrix} P_1 & V_P \\ P_1 D_1 & D_P V_P \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{P_1 V_P D_P - P_1 V_P D_1}{\Delta} = \frac{P_1 V_P (D_P - D_1)}{\Delta} = \frac{\cancel{P_1} V_P (D_P - D_1)}{\cancel{P_1} P_2 (D_2 - D_1)} = \frac{V_P (D_P - D_1)}{P_2 (D_2 - D_1)}$$

sostituendo otteniamo in conclusione che:

$$xP_1 = V_1 = 232\,788.73$$
$$yP_2 = V_2 = 121\,854.27$$

→ METODI PER RIMBORSARE PRESTITI – MUTUI, PIANI DI AMMORTAMENTO, RENDITE –

- RENDITA PERPETUA → paga la I° cedola dopo 1 anno e fino all'infinito

Vogliamo vedere come si può calcolarne il VA:

→ SUPPONIAMO CHE INVECE DI ∞ pagamenti ne abbiamo m; se d è il fattore di sconto allora

$$V_0^{(m)} = A\sum_{k=1}^{m} d^k = A\,\frac{1}{r}\left(1-d^m\right) \rightarrow \text{VALORE ATTUALE FINO A } m$$

e quindi

$$V_0^{(\infty)} = \lim_{m\to\infty} V_0^{(m)} = \lim_{m\to\infty} A\,\frac{1}{r}\left(1-d^m\right) \Longrightarrow V_0^{(\infty)} = \frac{A}{r}$$

$d>1 \rightarrow \infty$; $d<1 \rightarrow 0$ POICHÉ FATTORE DI SCONTO

es. 100 €/anno $r = 10\%$ ANNO OPPURE 2000 € SUBITO

$$VA_0 = \frac{100}{0.1} = 1000\ € \qquad\qquad VA_0 = 2000\ €$$

Scelgo la II° opportunità

es. VALUTARE RISPETTO AD UN TASSO $r = 10\%$ UNA OBBLIGAZIONE DI DURATA INFINITA CHE PAGA CEDOLE ANNUALI AD UN TAN = 5% anno

$$A = 5$$

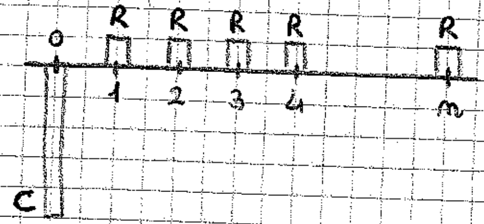
$$VA_{(CEDOLE)} = \frac{5}{0.1} = 50 \qquad VA_{(CAPITALE)} = 100\cdot \underset{\substack{\downarrow\\ m\to\infty\\ \shortparallel \\ 0}}{d^m} = 0 \Longrightarrow VA_{\text{OBBLIGAZIONE}} = 50$$

METODO LIBERO:

$$V_0^{(\infty)} = \sum_{k=1}^{\infty} A d^k = d\sum_{k=2}^{\infty} A d^{k-1} \longrightarrow$$ Da 1 vediamo la stessa successione infinita di A quindi $V_0^{\infty} = V_1^{\infty} d + A d$ e allora:

$$V_0^{\infty} = V_0^{\infty} d + Ad \Rightarrow V_0^{\infty}(1-d) = Ad \Rightarrow V_0^{\infty} = A\,\frac{d}{1-d} = A\,\frac{1}{r}$$

→ DETERMINAZIONE DELLA RATA COSTANTE POSTICIPATA NEL RIMBORSO DI UN PRESTITO
↳ SI PAGA ALLA FINE DEL PERIODO



Vogliamo determinare R conoscendo il tasso di interesse

Vogliamo innanzitutto che il VA delle rate R sia uguale a C valutato rispetto ad r:

$$R\sum_{k=1}^{n} d^k = C \implies R = \frac{C}{\frac{1-d^n}{r}}$$

esempio CALCOLARE LA RATA COSTANTE NECESSARIA PER RIMBORSARE UN PRESTITO C IN n rate MENSILI RISPETTO AD UN TAN = r E CAPITALIZZAZIONE MENSILE

$C = 1\,M \quad n = 240 \quad r_a = 20\%$

$$R = \frac{C}{\frac{1-d^n}{r}} \quad \text{con} \quad \begin{array}{l} C = 1M \\ r = \frac{r_a}{12} = \frac{0.2}{12} = \\ d = (1+r)^{-1} \\ \quad = \left(1+\frac{r_a}{12}\right)^{-1} \end{array} \implies R = 34452.77$$

→ PIANI DI AMMORTAMENTO PER MUTUI

• PIANO AMMORTAMENTO A RATA COSTANTE

È un piano di ammortamento nel quale per l'intera durata la rata si mantiene costante e pari ad R e si vede composta da una QUOTA INTERESSI e una QUOTA CAPITALE

$$R = \text{QUOTA INTERESSI} + \text{QUOTA CAPITALE} = I + C$$

Andiamo a determinare la QUOTA INTERESSI come il prodotto tra DEBITO e INTERESSE. Essendo nella maggioranza dei casi la rata posticipata allora si avrà che la QUOTA INTERESSI al tempo 1 sarà:

$$I_1 = \underbrace{D_0}_{\text{DEBITO ALL'ISTANTE 0}} \cdot i$$

Essendo la rata costante allora la QUOTA CAPITALE sarà determinata come differenza tra l'importo della stessa $\left(R = \frac{C}{\frac{1-d^n}{r}}\right)$ e la QUOTA INTERESSI

$$C_1 = R - I_1$$

Di conseguenza avremo che al tempo 1 il debito, su cui si andrà a determinare la quota interessi del secondo periodo, sarà:

$$D_1 = D_0 - C_1$$

ES. PIANO DI AMMORTAMENTO PRESTITO 100000 € DA RESTITUIRE IN 10 ANNI A RATE MENSILI COSTANTI POSTICIPATE AD UN TAN = 4,77% SENZA SPESE.

VAL. INIZ. FIN	TAN	ANNI	m
100000	4,77%	10	12

TOT. RATE	$i\_m = i_m$	$d\_m = d_m$	$a(N, i\_m) = a_{\overline{N}\rceil i_m}$	$R = \frac{D_0}{a_{\overline{N}\rceil i_m}}$
$10 \times 12 = 120$	$\frac{4,77\%}{12} = 0.40\%$	$(1+0.004)^{-1} = 0.9960$	$\frac{1-d^N}{i_m}$	1049,45

PERIODO	RATA	QUOTA INTERESSI	QUOTA CAPITALE	DEBITO
0	–	–	–	100000
1	1049,45	397,5	651,95	99348,05
2	1049,45	394,91	654,54	98693,51
⋮				
120				

In questa situazione, dato che non ci sono spese, il TAN dovrebbe coincidere con il TAEG, anche se ci è fornito un differente valore dovuto al fatto che dato che il TAN è un tasso annuale ma con capitalizzazione mensile il TAEG è quel tasso di rendimento con capitalizzazione annuale, e calcolato quindi come TASSO EFFETTIVO

$i = 4.77\% = \text{TAN}$ CAP. MENSILE

$$\left(1+\frac{i}{12}\right)^m = (1+i_e) \Rightarrow i_e = \left(1+\frac{i}{12}\right)^m - 1 \qquad m = 12$$

* NEL CASO IN CUI VI SIANO DELLE SPESE UN METODO PER IL CALCOLO DEL TAEG È QUELLO DI CONSIDERARE TALI SPESE A DIFFERENZA DEL CAPITALE PRESTATO E DI CONSIDERARE, DATA LA RATA, IL TAEG come il TIR che rende il V.A. DELLE RATE, A TASSO COSTANTE r, ESATTAMENTE UGUALE ALL'AMMONTARE DEL CAPITALE AL QUALE SOTTRAIAMO LE SPESE

$$100000 - \text{SPESE} = R\left(\frac{1-d^N(r)}{r}\right)$$

Essendo però tale TIR espresso per una capitalizzazione mensile dovrà poi essere riportato al tasso equivalente con capitalizzazione annuale: $i_e = \left(1+\frac{i}{12}\right)^m - 1$

→ MUTUO A QUOTA CAPITALE COSTANTE

È quel piano di ammortamento che prevede di corrispondere una quota capitale costante e quindi si avrà una rata variabile nel tempo. Calcoleremo quindi prima la quota capitale come rapporto tra debito e numero totale di rate: $C = D/N$; la quota interessi sarà sempre calcolata come $I_1 = D_0 \cdot i$ e quindi la rata sarà in 1 pari a $R_1 = C + I_1$