→ PRE-AMMORTAMENTO

Il periodo di pre-ammortamento è quel periodo nel quale è rimborsata la sola quota interessi e quindi vedrò una rata composta solamente dalla quota interessi; questo perché si paga il minimo perché il debito non aumenti.

STRUTTURA A TERMINE DEI TASSI DI INTERESSE – CAPITOLO IV° –

La teoria che andiamo ora ad esaminare ammette l'esistenza contemporanea di una serie di tassi di interesse, uno per ogni data scadenza, consentendo una comprensione più chiara del mercato del tasso di interesse e lo sviluppo di tecniche più sofisticate per l'analisi degli investimenti

→ CURVA DEI RENDIMENTI [redacted]

Il rendimento alla scadenza di un'obbligazione è strettamente legato alle condizioni generali del mercato dei titoli a rendimento certo, nel quale tutti i rendimenti tendono a variare insieme.

MA I RENDIMENTI DELLE OBBLIGAZIONI NON SONO TUTTI ESATTAMENTE UGUALI

Le differenze tra i rendimenti delle obbligazioni si spiegano in parte con il fatto che esse sono classificate diversamente in maniera QUALITATIVA: È NATURALE CHE L'ALTA QUALITÀ SIA PIÙ COSTOSA DI QUELLA BASSA e quindi ci si aspetta che un'obbligazione con rating AAA costi di più, ed abbia quindi un rendimento minore, rispetto ad un'obbligazione con rating B; ANCHE LA DURATA CONTRIBUISCE A SPIEGARE LE DIFFERENZE TRA I RENDIMENTI DELLE DIVERSE OBBLIGAZIONI aspettandoci così che obbligazioni "LUNGHE" tendano ad offrire rendimenti maggiori di quelle "BREVI" della medesima qualità

Unendo insieme queste considerazioni possiamo rappresentare graficamente la situazione attraverso la CURVA DEI RENDIMENTI • [redacted] (YIELD CURVE) nella quale IL RENDIMENTO È RAPPRESENTATO COME FUNZIONE DELLA DURATA.

A partire dalle nostre considerazioni allora I RENDIMENTI CONFIGURANO UNA CURVA CHE SALE GRADUALMENTE ALL'AUMENTARE DELLA DURATA: L'ANDAMENTO CRESCENTE È LA "FORMA NORMALE" della curva dei rendimenti e cioè quella che si verifica più frequentemente

Nel caso in cui le obbligazioni lunghe hanno rendimenti minori di quelle brevi allora avremo come risultato la "CURVA DEI RENDIMENTI INVERSA" che tende a manifestarsi quando i tassi a breve termine crescono rapidamente e gli investitori ritengono che la crescita sia temporanea cosicché i tassi a lungo termine non subiscono variazioni significative

→ STRUTTURA A TERMINE

La teoria della struttura a termine accantona la nozione di rendimento per concentrarsi SUI TASSI DI INTERESSE PURI, ed è basata sull'osservazione che il TASSO DI INTERESSE DIPENDE DALLA DURATA DEL PERIODO PER IL QUALE IL DENARO VIENE TRATTENUTO

→ TASSI SPOT

I TASSI SPOT sono i tassi di interesse di base che definiscono la struttura a termine; il tasso spot $s_t = r(t_0, t)$ È IL TASSO DI INTERESSE, ESPRESSO IN TERMINI ANNUI, APPLICATO AL DENARO TRATTENUTO IN PRESTITO DAL MOMENTO ATTUALE $(t_0 = 0)$ al momento t.
Tanto l'interesse quanto il capitale iniziale vengono pagati al momento t.
Nello fattispecie si avrà:

$s_1 = r(0,1)$ è il tasso di interesse a un anno, ovvero quel tasso applicato al denaro trattenuto un anno [È il prezzo di uno ZCB unitario con scadenza in 1]

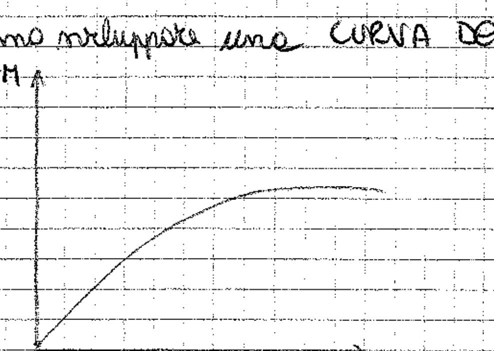
$s_2 = r(0,2)$ è il tasso di interesse applicato al denaro trattenuto 2 anni comunque espresso su base annua [È il prezzo di uno ZCB unitario con scadenza in 2]

La definizione di tasso spot presuppone però una convenzione di capitalizzazione che può variare a seconda dell'obiettivo considerato.

Le varie possibilità riguardo la capitalizzazione per il tasso spot possono essere:

- ANNUALE → il tasso spot s_t è definito in modo tale che $(1+s_t)^t = [1 + r(t_0,t)]^{(t-t_0)}$ cioè il fattore di crescita di un deposito mantenuto per t anni
- m PERIODI L'ANNO → il tasso spot s_t è definito in modo che $\left(1+\frac{s_t}{m}\right)^{mt} = \left[1 + \frac{r(t_0,t)}{m}\right]^{m(t-t_0)}$ cioè il fattore di crescita corrispondente
- CONTINUA → il tasso spot s_t è definito in modo che $e^{s_t t} = e^{r(t_0,t)(t-t_0)}$ cioè il fattore di crescita corrispondente.

In teoria è possibile misurare i tassi spot registrando i rendimenti delle obbligazioni zero coupon: un obbligazione zero coupon promette il pagamento di un importo stabilito in una data futura stabilita e quindi il rapporto tra IMPORTO DEL PAGAMENTO E PREZZO ATTUALE definisce il TASSO SPOT RISPETTO ALLA SCADENZA DELL'OBBLIGAZIONE. Attraverso tale procedura di misurazione possiamo sviluppare una CURVA DEI TASSI SPOT analoga a quella dei rendimenti



→ FATTORI DI SCONTO E VALORE ATTUALE

Una volta determinati i tassi spot è naturale definire i FATTORI DI SCONTO $d(t_0,t)$ corrispondenti a ciascun tipo temporale, OVVERO I FATTORI PER I QUALI OCCORRE MOLTIPLICARE I FLUSSI DI CASSA FUTURI IN MODO DA OTTENERE UN VALORE ATTUALE EQUIVALENTE

Per le diverse convenzioni di capitalizzazione definiamo i fattori di sconto nel modo seguente:

- ANNUALE per la capitalizzazione annuale $d(t_0,t) = [1 + r(t_0,t)]^{-(t-t_0)}$
- m PERIODI L'ANNO per la capitalizzazione su m $d(t_0,t) = \left[1 + \frac{r(t_0,t)}{m}\right]^{-m(t-t_0)}$

– CONTINUA per la capitalizzazione continua $d(t_0,t) = e^{-r(t_0,t)(t-t_0)}$

I fattori di sconto trasformano direttamente i flussi di cassa futuri in valori attuali equivalenti quindi dato una qualsiasi successione di flussi di cassa $(x_0, x_1, x_2, ..., x_n)$, IL VALORE ATTUALE RELATIVO AI TASSI SPOT PREVALENTI È QUINDI

$$VA = x_0 + x_1\, d(t_0,t_1) + x_2\, d(t_0,t_2) + ... + x_n\, d(t_0,t_n)$$

PER UNA OBBLIGAZIONE $d(t_0,t)$ È IL PREZZO A PRONTI IN t_0 DI UNO ZCB UNITARIO (CHE PAGA 1 in t)

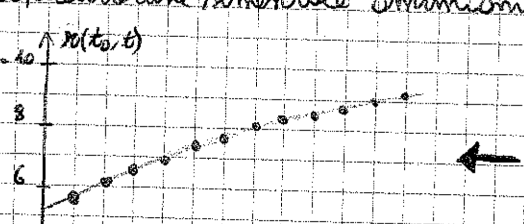
IL FATTORE DI SCONTO $d(t_0,t)$ RAPPRESENTA IL PREZZO DEL DENARO RICEVUTO NEL MOMENTO t

Il valore di una successione si determina sommando i prodotti "PREZZO × QUANTITÀ" di tutte le componenti della successione stessa

ESEMPIO 4.1

Data la seguente tabella dei tassi spot determinare il valore di un'obbligazione all' 8% con scadenza a 10 anni. Anche se normalmente per le obbligazioni utilizziamo tassi e formule valide per la capitalizzazione semestrale assumiamo ora che le cedole vengono pagate solo alla fine dell'anno.

ANNI	TASSI SPOT
1	5.571
2	6.088
3	6.555
4	6.978
5	7.361
6	7.707
7	8.020
8	8.304
9	8.561
10	8.793
11	9.003
12	9.193



← CURVA DEI TASSI SPOT

$$d(t_0,t) = [1 + r(t_0,t)]^{-(t-t_0)}$$

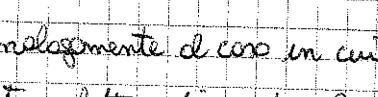
A partire dai tassi spot sopra ci calcoleremo i corrispondenti fattori di sconto $d(t_0,t)$ ed attualizzeremo poi il nostro flusso di cassa in 0.

ANNO	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
SCONTO	0.947	0.883	0.827	0.764	0.701	0.641	0.583	0.528	0.447	0.431
FLUSSO DI CASSA	8	8	8	8	8	8	8	8	8	108
VA	7.58	7.11	6.61	6.11	5.61	5.12	4.66	4.22	3.82	46.5

TOT 97.34

→ DETERMINAZIONE DELLA RATA

Supponiamo di aver contratto un debito $D = 1$ M € da dover rimborsare in 3 anni; allora calcoleremo la rata analogamente al caso in cui supponiamo che il tasso di interesse si mantenga costante ma sostituendo l'opportuno fattore di sconto. Ora quindi non potrà più essere utilizzato il denominatore $a_{\overline{n}|r}$.



Costruiremo la rata in modo tale che $R\,d(0,1) + R\,d(0,2) + R\,d(0,3) = D$ quindi

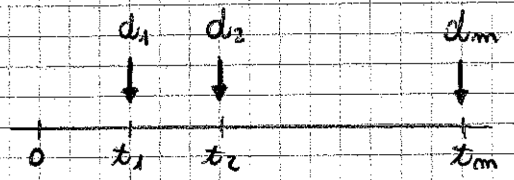
$$R = \frac{D}{\sum_{k=1}^{3} d(0,t_k)}$$

Continuando con i dati dell'esempio 4.1 avremo quindi che

$$R = \frac{D}{\sum_{k=1}^{3} d(0,t_k)} = \frac{1\,000\,000}{0.847+0.883+0.827} = \frac{1\,000\,000}{2.663} = 375516,335$$

→ DETERMINAZIONE DEL TASSO SPOT

Il modo più ovvio per determinare la curva dei tassi spot consiste nel trovare i prezzi di una serie di obbligazioni zero coupon aventi durate differenti; purtroppo le obbligazioni zero coupon disponibili sono piuttosto scarse e non è quindi sempre pratico determinare una serie completa di tassi spot in questo modo.
L'esistenza di obbligazioni zero coupon non è però essenziale affinché il concetto di tasso spot sia utile, né tali obbligazioni sono necessarie per determinare il valore del tasso spot.
È POSSIBILE DETERMINARE LA CURVA DEI TASSI SPOT SULLA BASE DEI PREZZI DELLE OBBLIGAZIONI CON CEDOLE, INIZIANDO DA QUELLE DI BREVE DURATA E PROCEDENDO VERSO QUELLE A LUNGO TERMINE.
Determineremo quindi il TASSO SPOT, avendo opportunamente calcolato il fattore di sconto, partendo dalle informazioni sulla obbligazione.
Supponiamo di osservare i prezzi di N obbligazioni, $(P_1, P_2, \dots, P_N) = \underline{P}$; l'obbligazione i $(i=1,\dots,N)$ paga cedola a_{ij} all'istante t_j $(j=1,\dots,m)$ e supponiamo di avere per le obbligazioni uno scadenzario comune → RAPPRESENTA IL FLUSSO DELL'OBBLIGAZIONE i.



Se P_1 è il prezzo di mercato della prima obbligazione allora questo dovrà essere pari al valore attuale dei pagamenti dell'obbligazione:

$$P_1 = a_{1,1}d_1 + a_{1,2}d_2 + \dots + a_{1,m}d_m$$

e dovrò quindi trovare i fattori di sconto impliciti nell'obbligazione.
Dovrò poi eseguire lo stesso procedimento per tutte le obbligazioni

$$P_K = a_{K,1}d_1 + a_{K,2}d_2 + \dots + a_{K,m}d_m$$

ottenendo alla fine un SISTEMA LINEARE di N equazioni in m incognite:

$$\underset{(N\times m)}{A}\ \underset{(m\times 1)}{\underline{d}} = \underline{P} \rightarrow (N\times 1)$$

Applicando il TEOREMA DI ROUCHÉ-CAPELLI, che ci permette di calcolare il numero di soluzioni di un sistema di equazioni lineari in funzione del RANGO di alcune matrici, allora TROVEREMO IL RANGO DELLA MATRICE DEI COEFFICIENTI (A) e LA CONFRONTEREMO CON IL RANGO DELLA MATRICE COMPLETA (A|P).

Il sistema ammette soluzioni solamente se IL RANGO DELLA MATRICE DEI COEFFICIENTI È UGUALE AL RANGO DELLA MATRICE COMPLETA e cioè:

$$rg(A) = rg(A|P) = K \qquad \boxed{rg A \geq rg(A|P)}$$

Nel caso del nostro esempio otteniamo ∞^{m-K} soluzioni

Nella pratica, disponendo di un numero di obbligazioni elevato rispetto allo necessario e cioè al numero di incognite da trovare, avremo che IL RANGO DELLA MATRICE DEI COEFFICIENTI (A) sarà PIÙ PICCOLO DEL RANGO DELLA MATRICE COMPLETA (A|P) ma avremo un numero di fattori di sconto troppo inferiore rispetto al numero delle obbligazioni e per calcolarli cercheremo di minimizzare lo scarto quadratico medio.

* SI AVRÀ UN'UNICA SOLUZIONE quando $rg(A) = rg(A|P) = K$ e $m = K$

→ TASSO PAR YIELD → TASSO DI PARITÀ

È il TASSO D'INTERESSE AL QUALE OCCORREREBBE EMETTERE UN TITOLO COUPON BOND PERCHÉ IL MERCATO LO QUOTI ALLA PARI OGGI

Disponendo dei fattori di sconto allora il TASSO DI PARITÀ sarà quel tasso per cui un flusso del tipo [redacted] $(-C, I, I, \dots, I+C) | (0, 1, 2, \dots, m)$ avrà $VA = 0$ o analogamente $I\,d(0,1) + I\,d(0,2) + \dots + I\,d(0,m) + C\,d(0,m) = C$

Essendo quindi a conoscenza dei rispettivi tassi spot e quindi dei fattori di sconto a pronti corrispondenti sarà possibile determinare l'opportuna cedola del titolo coupon bond:

$$I\left[d(0,1) + d(0,2) + \dots + d(0,m)\right] + C\,d(0,m) = C \Rightarrow I = \frac{C - C\,d(0,m)}{d(0,1) + d(0,2) + \dots + d(0,m)} \Longrightarrow$$

$$I = \frac{C\,(1 - d(0,m))}{d(0,1) + d(0,2) + \dots + d(0,m)}$$

Il corrispondente tasso cedolare calcolato come rapporto tra $\frac{I}{C}$ corrisponderà al TASSO DI PARITÀ corrispondente all'intera durata dell'obbligazione

N.B. Per il calcolo di TASSI DI PARITÀ DI DURATA INFERIORE SARÀ NECESSARIO ovviare il processo di attualizzazione all'istante desiderato e calcolare poi il tasso di parità.

N.B. 2 Il rapporto $\frac{I}{C}$ sarà un tasso cedolare riferito alla tipologia di capitalizzazione specifica quindi dovrà essere moltiplicato per ~~d~~ l'opportuno m se si vuole [redacted] rappresentare un TASSO DI PARITÀ ANNUALE

→ TASSI FORWARD

Dalla definizione di tasso spot emerge direttamente il concetto di tasso forward;

I TASSI FORWARD SONO TASSI DI INTERESSE APPLICATI A DENARO CHE VERRÀ PRESO IN PRESTITO TRA DUE DATE FUTURE, MA A CONDIZIONI CONCORDATE OGGI

Per la precedente definizione, considerando uno ZCB unitario allora definiamo

$d(t_0, T_1, T_2)$ IL PREZZO A TERMINE STABILITO IN t_0 E DA PAGARSI IN T_1 PER LO ZCB UNITARIO CHE SCADE IN T_2 (che ha maturity in T_2)

$t_0 \quad T_1 \quad T_2$

ci permette quindi di fissare il tasso di interesse tra T_1 e T_2

Per spiegare il concetto di tassi forward e la relazione tra PREZZI A PRONTI e PREZZI A TERMINE utilizziamo il seguente caso;

SUPPONIAMO DI ESSERE IN t_0 e DI VOLERE 1 € IN T_2:

disponiamo di 2 strategie che conducono al medesimo risultato

	t_0	T_1	T_2
ⓐ COMPRO A PRONTI UNO ZCB UNITARIO CHE SCADE IN T_2, quindi pago $-d(t_0,T_2)$ in t_0 e ricevo 1 in T_2	$-d(t_0,T_2)$	0	$+1$

	t_0	T_1	T_2
ⓑ POSSO COMPRARE A TERMINE CON CONSEGNA IN T_1 UNO ZCB UNITARIO CHE SCADE IN T_2 AD UN PREZZO STABILITO IN t_0 e pari a $d(t_0,T_1,T_2)$	0	$-d(t_0,T_1,T_2)$	$+1$
VOGLIO VOLER DISPORRE IN T_1 DI UN AMMONTARE PARI ALLA SPESA $d(t_0,T_1,T_2)$ E COMPRO A PRONTI AL PREZZO $d(t_0,T_1)$ UNA QUANTITÀ PARI A $d(t_0,T_1,T_2)$ DI ZCB UNITARIO CON SCADENZA IN T_1	$-d(t_0,T_1)\,d(t_0,T_1,T_2)$	$d(t_0,T_1,T_2)$	0

applichiamo ora il PRINCIPIO DI CONFRONTO poiché disponiamo di due metodi alternativi che ci consentono entrambi di avere 1 € in T_2. Confrontiamo quindi i prezzi delle due strategie:

PREZZO STRATEGIA ⓐ è $\quad d(t_0,T_2)$

PREZZO STRATEGIA ⓑ è $\quad d(t_0,T_1)\,d(t_0,T_1,T_2)$

e quindi:

$$d(t_0,T_2) = d(t_0,T_1)\,d(t_0,T_1,T_2)$$

ESPRIME LA RELAZIONE TRA PREZZO A PRONTI E PREZZO A TERMINE

oppure espressa come:

$$d(t_0,T_1,T_2) = \frac{d(t_0,T_2)}{d(t_0,T_1)}$$

e cioè il prezzo a termine è ottenuto capitalizzando per il fattore montante del periodo di acquisto il prezzo a pronti tra t_0 e T_2

Discende inoltre dalla relazione che PREZZO A TERMINE $>$ PREZZO A PRONTI

$$d(t_0,T_1,T_2) > d(t_0,T_2)$$

Giustifichiamo l'impiego del metodo del confronto attraverso il PRINCIPIO DI ARBITRAGGIO che consiste eventualmente nel VENDERE CIÒ CHE COSTA DI PIÙ ED ACQUISTARE QUELLO CHE COSTA MENO, esisterebbe cioè l'opportunità di realizzare un profitto di arbitraggio.

Potrei infatti vendere al prezzo $d(t_0,T_2)$ sapendo di dover rimborsare 1 in T_2 e ricoprire tale 1 da rimborsare in T_2 attraverso l'implementazione della II^a STRATEGIA e cioè PAGANDO $\underbrace{d(t_0,T_1)\,d(t_0,T_1,T_2)}$ → Compro a pronti una quantità $d(t_0,T_1,T_2)$ di ZCB UNITARIO CON SCADENZA IN T_2 al prezzo $d(t_0,T_1)$

Alla fine riuscirò ad ottenere la differenza $d(t_0,T_2)-d(t_0,T_1)\,d(t_0,T_1,T_2)$

Ammetteremo che nel mercato non sia possibile implementare questo schema, dato che i potenziali speculatori sono sempre alla ricerca di simili discrepanze, e quando si presentano, vengono subito sfruttate, riportando a zero il divario tra i tassi.

Come per i tassi spot, anche per i tassi forward è possibile fornire una definizione:

TASSO FORWARD

Il tasso forward tra i momenti T_1 e T_2 è denotato da $r(t_0,T_1,T_2)$ ed è IL TASSO A TERMINE STABILITO IN t_0 e VALIDO TRA T_1 e T_2

È quindi il tasso di interesse applicato al denaro preso in prestito al momento T_1 e da restituire con gli interessi al momento T_2

→ DETERMINAZIONE DEI TASSI FORWARD

Per determinare i tassi forward occorrerà dapprima determinare il fattore di sconto a termine e successivamente da questo determinare il corrispondente TASSO FORWARD.

Infatti data la RELAZIONE GENERALE $d(t_0,T_2)=d(t_0,T_1)\,d(t_0,T_1,T_2)$ allora basterà conoscere i fattori di sconto a pronti $d(t_0,T_2)$ e $d(t_0,T_1)$, calcolare poi il rapporto tra $d(t_0,T_2)/d(t_0,T_1)=d(t_0,T_1,T_2)$ pari cioè al fattore di sconto a termine e poi estrarre il corrispondente tasso forward dalla relazione:

$$d(t_0,T_1,T_2)=\left[1+r(t_0,T_1,T_2)\right]^{-(T_2-T_1)} \Rightarrow r(t_0,T_1,T_2)=\frac{1}{d(t_0,T_1,T_2)^{(T_2-T_1)}}-1$$

Una formulazione più generale è quella in riferimento alle diverse convenzioni di capitalizzazione

- ANNUALE per $t_0<T_1<T_2$ si avrà

$$d(t_0,T_2)=d(t_0,T_1)\,d(t_0,T_1,T_2) \Rightarrow \left[1+r(t_0,T_2)\right]^{-(T_2-t_0)}=\left[1+r(t_0,T_1)\right]^{-(T_1-t_0)}\times\left[1+r(t_0,T_1,T_2)\right]^{-(T_2-T_1)}$$

- m PERIODI L'ANNO per $t_0<T_1<T_2$ espressi in periodi varrà sempre la relazione

$$d(t_0,T_2)=d(t_0,T_1)\,d(t_0,T_1,T_2) \Rightarrow \left[1+\frac{r(t_0,T_2)}{m}\right]^{-(T_2-t_0)}=\left[1+\frac{r(t_0,T_1)}{m}\right]^{-(T_1-t_0)}\times\left[1+\frac{r(t_0,T_1,T_2)}{m}\right]^{-(T_2-T_1)}$$

- CONTINUA per $t_0<T_1<T_2$, definiti per ogni t_0, T_1 e T_2 varrà

$$d(t_0,T_2)=d(t_0,T_1)\,d(t_0,T_1,T_2) \Rightarrow e^{-r(t_0,T_2)(T_2-t_0)}=e^{-r(t_0,T_1)(T_1-T_0)}\times e^{-r(t_0,T_1,T_2)(T_2-T_1)}$$

quindi semplicemente $-r(t_0,T_2)(T_2-t_0)=-(T_1-t_0)\,r(t_0,T_1)-r(t_0,T_1,T_2)(T_2-T_1) \Rightarrow$

$$\Rightarrow r(t_0,T_1,T_2)=\frac{r(t_0,T_2)(T_2-t_0)-r(t_0,T_1)(T_1-t_0)}{T_2-T_1}$$

ESEMPIO 4.4 CALCOLO TASSO FORWARD

$r(0,1) = 7\%$ $\quad r(0,2) = 8\%$ $\quad r(0,1,2) = ?$

$$d(0,1) = [1+r(0,1)]^{-1} \qquad d(0,2) = [1+r(0,2)]^{-2}$$
$$= (1.07)^{-1} \qquad\qquad = (1.08)^{-2}$$

RELAZIONE GENERALE $[t_0 < T_1 < T_2]$

$$d(t_0,T_2) = d(t_0,T_1)\, d(t_0,T_1,T_2) \longrightarrow d(0,2) = d(0,1)\, d(0,1,2)$$

$$d(0,1,2) = \frac{d(0,2)}{d(0,1)} = \frac{(1.08)^{-2}}{(1.07)^{-1}} = 0.9173 \quad \text{ed essendo } d(0,1,2) = [1+r(0,1,2)]^{\overbrace{-1}^{-(T_2-T_1)}}$$

$$r(0,1,2) = \frac{1}{d(0,1,2)} - 1 = 9.01\%$$

→ SPIEGAZIONI PER LA STRUTTURA A TERMINE

La curva dei rendimenti non è quasi mai orizzontale e di solito sale gradualmente all'aumentare della durata. Anche la curva dei tassi spot ha caratteristiche simili, tipicamente molto inclinata verso l'alto per le brevi durate e continua a essere inclinata, ma in misura minore, a mano a mano che la durata si allunga.

Vi sono diverse spiegazioni sul perché la curva non sia semplicemente orizzontale.

* TEORIA DELLE ASPETTATIVE

La prima spiegazione è che i tassi spot sono determinati dalle aspettative sui tassi d'interesse futuri. Supponiamo che, come nella normalità, la curva dei tassi spot sia inclinata verso l'alt[o]: il tasso spot a 2 anni è quindi maggiore di quello ad 1 anno.

Secondo questa teoria ciò dipende dal fatto che il mercato ritiene probabile che l'anno prossim[o] il tasso ad 1 anno sarà più elevato (convinzione probabilmente da attribuire al presentimento che l'inflazione aumenterà e quindi per poter mantenere il tasso di interesse reale costante il tasso nominale dovrà aumentare).

QUESTA CONVINZIONE DIFFUSA SI TRADUCE IN UN'ASPETTATIVA DEL MERCATO E SI CONCRETIZZA CON L'IPOTESI DELLE ASPETTATIVE:

consideriamo il tasso forward $r(0,1,2)$, ovvero il tasso implicato per il denaro prestato per 1 anno, tra 1 anno.

SECONDO L'IPOTESI DELLE ASPETTATIVE TALE TASSO FORWARD È ESATTAMENTE UGUALE AL TASSO SPOT A 1 ANNO CHE IL MERCATO SI ATTENDE PER IL PROSSIMO ANNO

Per l'esempio 4.4 sopra, $r(0,1,2) = 9.01\%$ è il tasso spot $r'(1,2)$ a 1 anno che il mercato si attende per il prossimo anno.

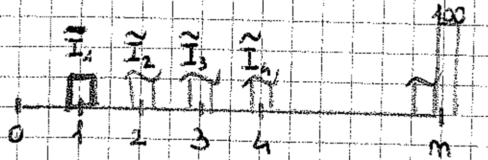
Questa teoria manifesta però alcune debolezze: secondo questa spiegazione infatti il mercato si attende che i tassi aumentino ogni volta che la curva dei tassi spot è inclinata verso l'alto e cioè praticamente sempre. Quindi le aspettative non possono essere corrette dato che i tassi non aumentano tanto spesso quanto le aspettative implicherebbero.

→ OBBLIGAZIONI A TASSO VARIABILE

Le obbligazioni a tasso variabile hanno valore nominale e scadenza fissi ma le CEDOLE SON[O] LEGATE AI TASSI DI INTERESSE SHORT CORRENTI.

[I TASSI SHORT (o tassi a breve) SONO TASSI FORWARD RELATIVI AD UN SINGOLO PERIODO.
IL TASSO SHORT AL MOMENTO K È QUINDI $r_K = r(t_0, t_K, t_{K+1})$ E CIOÈ IL TASSO FORWARD PE[R] IL PERIODO DA K a K+1.
I TASSI SHORT POSSONO ESSERE CONSIDERATI FONDAMENTALI COME I TASSI SPOT, DATO CHE UNA SERIE COMPLETA DI TASSI SHORT SPECIFICA IN MODO COMPLETO UNA STRUTTURA A TERMINE.

• Consideriamo ad esempio un **CCT** che paga cedole semestrali (come il BTP), l'importo delle quali è aleatorio inizialmente e sarà noto solamente sei mesi prima di ciascun pagamento.



Ciascuna cedola sarà stabilita con riferimento al tasso di interesse, noto nell'istante prima, e che sarà valido fino all'istante seguente; ad esempio

$$\tilde{I}_3 = \underbrace{\tilde{i}(2,3)}_{\text{TASSO D'INTERESSE A PRONTI ? NOTO IN } t_2 \text{ E VALIDO FINO IN } t_3} \cdot 100$$

Il tasso d'interesse viene preso andando a vedere I PREZZI DI ASSEGNAZIONE DEI BOT ALL'EMISSIONE

• Consideriamo ad esempio un MUTUO A TASSO VARIABILE.

Per andare a costruire il piano di ammortamento ricordiamo che la rata si vedrà composta da QUOTA INTERESSE (che dipenderà appunto dal tasso di interesse, facendo riferimento al TASSO EURIBOR, noto giorno per giorno per diverse maturity + uno SPREAD compreso tra i 100 e 200 bp) e dalla QUOTA CAPITALE.

PIANO DI AMMORTAMENTO

PERIODO K	DEBITO D	QUOTA INTERESSI I	QUOTA CAPITALE C	RATA R
0	D_0			
1	$D_1 = D_0 - C_1$	$I_1 = i(0,1) D_0$	C_1	$C_1 + I_1$
2	$D_2 = D_1 - C_2$	$I_2 = i(1,2) D_1$	C_2	$C_2 + I_2$
3	$D_3 = D_2 - C_3$	$I_3 = i(2,3) D_2$	C_3	$C_3 + I_3$

→ PREASSEGNATE ma non necessariamente tutte uguali poiché dipenderà dalla particolare struttura del mutuo (QUOTA CAPITALE COSTANTE - PREAMMORTAMENTO ecc)

Il calcolo del VA di un oggetto i cui importi sono aleatori ci consente di determinare un metodo di determinazione di importi aleatori. Procederemo illustrando una strategia di investimento:

La STRATEGIA DI INVESTIMENTO è quella di INVESTIRE $d(0,1)$ in 0 e di OTTENERE $1/d(1,2)$ in 2. L'aleatorietà è data dal fatto che anche se sappiamo di ottenere $1/d(1,2)$ vogliamo valutare in 0 un titolo che paga $1/d(1,2)$ nel periodo 2.

	0	1	2
• In 0 compro a pronti uno ZCB unitario con scadenza in 1 pagandolo $d(0,1)$, prezzo di uno ZCB unitario con scad in 1	$-d(0,1)$	1	0
• Reinvesto l'€ disponibile in 1 nell'acquisto di un titolo che scade in 2; il prezzo di questo titolo è $d(1,2)$ quindi ne acquisto in numero $1/d(1,2)$ che corrisponderà a ciò che ottengo in 2	0	-1	$1/d(1,2)$
• Vendo uno ZCB unitario in 0 sapendo di dover restituire 1 in 2 ed ottenendo in 0 $d(0,2)$	$d(0,2)$	0	1

Combinando quindi i 3 passaggi vediamo come a fronte di una spesa complessiva $d(0,1)-d(0,2)$ in 0 riusciamo ad ottenere in 2
$1/d(1,2) - 1 = 1+i(1,2)-1 = i(1,2)$

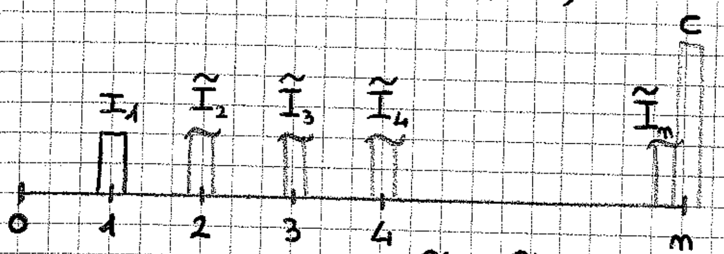
$$\frac{1}{d(1,2)} - 1 = i(1,2)$$

Quindi $V_0\left(i(1,2)\right) = d(0,1) - d(0,2)$

Risulterà ora immediato che ad esempio per un importo aleatorio $\tilde{I}_k = i(k-1;k)\cdot C$ allora potrà essere determinato in 0 il valore di tale importo nel modo seguente:

$$VA(\tilde{I}_k) = VA\left[i(k-1;k)\cdot C\right] = C\cdot\left[d(0,k-1) - d(0,k)\right]$$

→ CALCOLO VA DI UN TITOLO (CCT) CON IMPORTI CEDOLE ALEATORI



Volendo calcolare il VA del flusso allora andremo ad effettuare la somma dei valori attuali.

Il generico importo aleatorio $\tilde{I}_K = \tilde{i}(K-1,K)\cdot C$ $\quad [\text{es. } K=2 \Rightarrow \tilde{I}_2 = i(1,2)\cdot C]$ quindi

$$\underset{\text{PER CEDOLE ALEATORIE}}{V_0} = V_0(\tilde{I}_2) + V_0(\tilde{I}_3) + \dots + V_0(\tilde{I}_m) + V_0(C)$$

$$= C\left[d(0,1)-d(0,2)\right] + C\left[d(0,2)-d(0,3)\right] + \dots + C\left[d(0,m-1)-d(0,m)\right] + C\left[d(0,m)\right]$$

$$= C\left[d(0,1) - \cancel{d(0,2)} + \cancel{d(0,2)} - \cancel{d(0,3)} + \dots + \cancel{d(0,m-1)} - \cancel{d(0,m)} + \cancel{d(0,m)}\right] =$$

$$= C\, d(0,1)$$

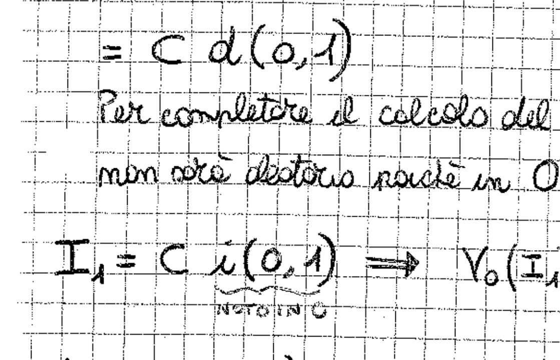
Per completare il calcolo del VA occorrerà inserire il VA della prima rata il cui importo non sarà aleatorio poiché in 0 già conosciamo $i(0,1)$:

$$I_1 = C\, \underbrace{i(0,1)}_{\text{NOTO IN } 0} \Longrightarrow V_0(I_1) = I_1\, d(0,1) = C\, i(0,1)\, d(0,1)$$ e quindi il VA complessivo

$$VA = C\, d(0,1) + C\, i(0,1)\, d(0,1) = C\, d(0,1)\left[1 + i(0,1)\right] = C\, \frac{1}{\cancel{1+i(0,1)}}\left[\cancel{1+i(0,1)}\right] = C$$

UN TITOLO A TASSO VARIABILE QUOTA SEMPRE ALLA PARI IN 0 E IN OGNI ISTANTE DI RICALCOLO DELLA CEDOLA

Dal punto di vista del VA è più stabile un titolo a tasso variabile rispetto ad un titolo a tasso fisso



Notiamo come per il CCT il valore tra un istante di ricalcolo e l'altro può variare riportandosi però su C in corrispondenza esatta del ricalcolo.

Quindi anche la DURATION di un titolo a tasso variabile come il CCT sarà MOLTO PICCOLA e al massimo pari alla "distanza" che manca dal prossimo stacco cedola (6 m)

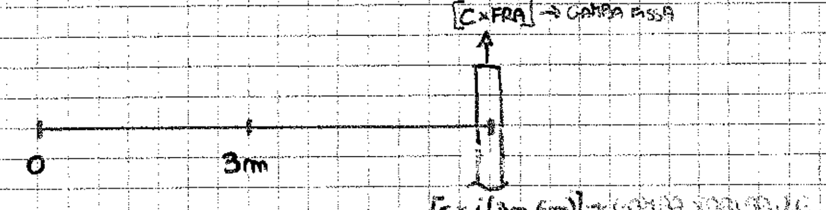
Notiamo inoltre come il VA del BTP sia fortemente influenzato dalle oscillazioni del tasso di interesse e possa arrivare anche a significativi scostamenti da C.

Per la DURATION si avrà generalmente una ALTA DURATION (alto rischio) all'inizio

→ CONTRATTO DERIVATO SUI TASSI DI INTERESSE

FRA (FORWARD RATE AGREEMENT)

Un contratto FRA viene stabilito in questa maniera:
si fissa un capitale molto alto (AD ESEMPIO $C = 1M$) e una parte (GAMBA FISSA o FIXED LEG) si impegna a pagare un interesse fisso al tasso FRA mentre l'altra parte (GAMBA VARIABILE o FLOATING LEG) paga l'interesse variabile che sarà noto solo tra 3 mesi corrispondendo quindi $[i(3m,6m)\cdot C]$



Alla scadere dei 6 mesi verrà pagato solamente la differenza delle quote interesse tra le due gambe

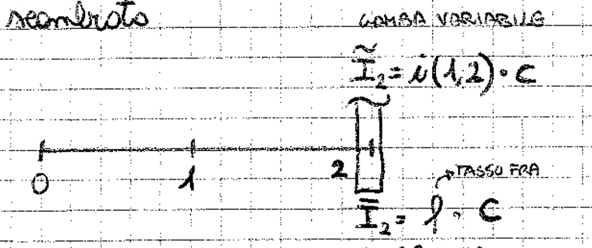
Supponiamo che il tasso FRA 3×6 = 2.85%; allora la gamba fissa si impegnerà a dare tra 6 mesi un interesse dello 2.85% su un capitale di 1 M € alla gamba variabile.
Si potranno ora verificare 2 differenti casi:

SE TASSO CHE SI VERIFICA TRA 3 MESI (EURIBOR) 2.5% < TASSO FRA 3×6 2.85% → LA GAMBA VARIABILE GUADAGNA LO 0.35%

SE TASSO CHE SI VERIFICA TRA 3 MESI (EURIBOR) 3% > TASSO FRA 3×6 2.85% → LA GAMBA FISSA GUADAGNA LO 0.15%

→ CALCOLO TASSO FRA

DEF. Il TASSO FRA è quel tasso che rende il V_0 dell'interesse della gamba fissa esattamente uguale al V_0 dell'interesse della gamba variabile.
Questo perché in 0 non c'è scambio di denaro, e cioè il capitale è solamente fissato ma non scambiato.



$$\left.\begin{array}{l} V_0(Float) = V_0(i(1,2)\cdot C) = C\left[d(0,1) - d(0,2)\right] \\ V_0(Fix) = V_0(f\cdot C) = C\cdot f\cdot d(0,2) \end{array}\right\} \Rightarrow \cancel{C}\left[d(0,1)-d(0,2)\right] = \cancel{C}\cdot f\cdot d(0,2) \Rightarrow$$

$$f = \frac{d(0,1)-d(0,2)}{d(0,2)} = \frac{d(0,1)}{d(0,2)} - 1$$

→ $d(0,2) = d(0,1)\,d(0,1,2) \Rightarrow \frac{d(0,1)}{d(0,2)} = \frac{1}{d(0,1,2)}$ RELAZIONE TASSI A PRONTI TASSI A TERMINE

$$f = \frac{1}{d(0,1,2)} - 1 = \frac{1}{[1+i(0,1,2)]^{-1}} - 1 = \cancel{1} + i(0,1,2) - \cancel{1} \Rightarrow$$

$$f = i(0,1,2)$$ IL TASSO FRA È UGUALE AL TASSO A TERMINE

FLUSSI DI CASSA ALEATORI

CAP. VI

LA TEORIA DEL PORTAFOGLIO NELL'APPROCCIO MEDIA - VARIANZA

Quando si effettua un investimento, tipicamente l'esborso iniziale di capitale è noto, mentre vi è incertezza nella somma che verrà ricevuta. Ci concentreremo su investimenti effettuati su un singolo periodo: il denaro viene investito al momento iniziale e la remunerazione si ottiene alla fine del periodo. Tale assunzione che l'investimento preveda un unico periodo costituisce una buona approssimazione anche se molti investimenti comuni, come ad esempio quelli in azioni quotate, non sono legati a un unico periodo prefissato, dal momento che possono essere liquidati in qualsiasi momento e possono fruttare dividendi periodici.

GESTIREMO L'INCERTEZZA ATTRAVERSO IL METODO MATEMATICO dell'analisi MEDIA - VARIANZA che utilizza solo in misura limitata la teoria della probabilità e conduce a utili espressioni e procedure matematiche.

→ RENDIMENTO DI UN TITOLO RISCHIOSO

Gli strumenti di investimento che possono essere acquistati e venduti vengono spesso chiamati TITOLI.

Supponiamo di acquistare un titolo al tempo 0 e di venderlo un anno dopo.

Il RENDIMENTO TOTALE dell'investimento è definito come il rapporto tra il rendimento ricevuto e l'importo investito:

$$\text{RENDIMENTO TOTALE} = R = \frac{\text{IMPORTO RICEVUTO}}{\text{IMPORTO INVESTITO}}$$

e indicando con X_0 l'importo investito e con X_1 l'importo ricevuto può essere riscritto

$$R = \frac{X_1}{X_0}$$

Il TASSO DI RENDIMENTO è invece definito dal rapporto:

$$\text{TASSO DI RENDIMENTO} = r = \frac{\text{IMPORTO RICEVUTO} - \text{IMPORTO INVESTITO}}{\text{IMPORTO INVESTITO}} = \frac{X_1 - X_0}{X_0}$$

È facile notare la RELAZIONE CHE LEGA R a r:

se infatti $R = \frac{X_1}{X_0}$ allora $r = \frac{X_1 - X_0}{X_0} = \frac{X_1}{X_0} - 1 = R - 1 \implies r = R - 1$

o indifferentemente $R = r + 1$ che può ancora essere riscritta come (dato che $R = \frac{X_1}{X_0}$)

$\frac{X_1}{X_0} = r + 1 \implies X_1 = (1 + r)X_0$ constatando così come IL TASSO DI RENDIMENTO SI COMPORTI IN MODO ANALOGO AD UN TASSO DI INTERESSE

→ VENDITA ALLO SCOPERTO

La procedura di VENDITA ALLO SCOPERTO o SHORTING è la possibilità di vendere un titolo che non si possiede, prendendolo in prestito da qualcuno che lo possiede e rivendendolo ad un altro soggetto, ricevendo così l'importo X_0. Successivamente si restituisce il prestito acquistando il titolo al prezzo X_1 e rendendolo a chi lo aveva prestato.

Si possono configurare 2 possibili scenari:

- SE L'IMPORTO X_1 È INFERIORE ALL'IMPORTO X_0 INIZIALE ⇒ è stato realizzato un profitto pari a $X_0 - X_1$ e la vendita allo scoperto è stata quindi redditizia poiché il prezzo del titolo è diminuito.
- SE L'IMPORTO X_1 È SUPERIORE ALL'IMPORTO X_0 INIZIALE ⇒ si presenta una perdita pari a $X_1 - X_0$.

Dato che X_1 può aumentare arbitrariamente la procedura della vendita allo scoperto è considerata piuttosto rischiosa, o pericolosa, perché la possibile perdita è ILLIMITATA.

Lo svolgimento della procedura della vendita allo scoperto replica sostanzialmente la funzione della società emittente.

IL RENDIMENTO ASSOCIATO ALLA VENDITA ALLO SCOPERTO PUÒ ESSERE COSÌ DETERMINATO:

Si riceve X_0 all'inizio e si paga X_1 in seguito, quindi la spesa è $-X_0$ e l'entrata finale è $-X_1$. Il rendimento totale è quindi

$$R = \frac{-X_1}{-X_0} = \frac{X_1}{X_0}$$

notando come i segni meno si annullino ottenendo la stessa espressione valida per l'acquisto del titolo. Quindi la formula del rendimento R si applica algebricamente sia all'acquisto e sia alla vendita allo scoperto potendo esprimere questa conclusione come:

$-X_1 = -X_0 R = -X_0(1+r)$ evidenziando come l'entrata finale sia legata alla spesa iniziale

LA VENDITA ALLO SCOPERTO CONVERTE UN TASSO DI RENDIMENTO NEGATIVO IN UN PROFITTO POICHÉ L'INVESTIMENTO INIZIALE È NEGATIVO

es. VENDIAMO ALLO SCOPERTO 100 AZIONI CHE IN QUESTO MOMENTO SONO VENDUTE SUL MERCATO A 10 €, QUINDI RICEVIAMO DALLA VENDITA 1000 €. DOPO UN ANNO IL PREZZO DELLE AZIONI È SCESO A 9 € QUINDI NE ACQUISTIAMO 100 DA RESTITUIRE ALL'INTERMEDIARIO EFFETTUANDO UNA SPESA DI 900 €. POICHÉ IL PREZZO È DIMINUITO LA TRANSAZIONE È STATA VANTAGGIOSA E ABBIAMO REALIZZATO UN PROFITTO DI 100 €

La medesima operazione avrebbe invece provocato una perdita a colui che avesse acquistato l'azione allo inizio dell'anno e l'avesse venduta alla fine, perdendo 100 €.

Per quest'esempio si ha: $R = \frac{900}{1000} = 0.90$ e $r = \frac{900-1000}{1000} = -0.10 = -10\%$

Notando come r = TASSO DI RENDIMENTO $= -10\%$, è quindi negativo dall'azione di vendita allo scoperto consegue un profitto pari a $-X_0(r)$ $-1000(-0.1) = 100$ €

→ RENDIMENTO DEL PORTAFOGLIO

Supponiamo che in generale se investo C € in un titolo i il cui rendimento è R^i dopo un anno ottengo $C \cdot R^i$ [C può anche essere negativo e realizzo un guadagno se R è minore di 1]

Il valore della singola azione sarà pari a $\frac{C}{V_0^i}$ e il PREZZO in 1 sarà V_1^i e quindi il VALORE TOTALE DELLA MIA POSIZIONE IN 1 sarà: $\frac{C}{V_0^i} V_1^i = C R^i = C(1+r^i)$

Considerando un portafoglio:

DATO UN CAPITALE INIZIALE X_0 LO INVESTO SU n TITOLI e cioè lo ripartisco sugli n titoli disponibili. Quindi $\sum_{i=1}^{n} X_{0i} = X_0$ dove X_{0i} rappresenta l'importo investito nel titolo i

Indichiamo con ω_i la percentuale investita nei singoli titoli, $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$, ovvero il PESO o FRAZIONE del titolo i all'interno del portafoglio. Ovviamente si avrà che $\sum_{i=1}^{n} \omega_i = 1$.

I valori di ω_i possono essere anche negativi se è ammessa la vendita allo scoperto infatti:

$\omega_i < 0$ STO EFFETTUANDO VENDITA ALLO SCOPERTO SUL TITOLO i

$\omega_i > 0$ STO ACQUISTANDO IL TITOLO i

In $t=0$ ho $V_0 = X_0$ cioè il valore iniziale del portafoglio è esattamente uguale al capitale iniziale investito.

Il valore X_1 sarà IL VALORE FINALE DEL PORTAFOGLIO e sarà uguale a quanto investo nel I° titolo per il rispettivo rendimento più lo stesso per il secondo e così via, ottenendo

$$X_1 = \omega_1 \cdot X_0 \cdot R_1 + \omega_2 \cdot X_0 \cdot R_2 + \ldots + \omega_n \cdot X_0 \cdot R_n$$

potendo così ottenere il RENDIMENTO DEL PORTAFOGLIO raccogliendo a destra X_0 e dividendo per questa quantità X_1 e cioè

$$\frac{X_1}{X_0} = \omega_1 R_1 + \omega_2 R_2 + \ldots + \omega_n R_n$$

Notiamo quindi che per ottenere IL RENDIMENTO DI UN PORTAFOGLIO basti fare la media pesata dei rendimenti dei singoli titoli

Supponiamo ad esempio che $R_1 = 1.1 \Rightarrow$ il titolo 1 ha reso il 10% e $R_2 = 0.9 \Rightarrow$ il titolo 2 ha perso il 10% e supponiamo che abbia investito il 60% del capitale iniziale nel titolo 1 e cioè $\omega_1 = 60\%$ e il 40% nel titolo 2 quindi $\omega_2 = 40\%$

Avremo che il REND. del portafoglio sarà:

$$\text{RENDIMENTO PORTAFOGLIO} = \omega_1 R_1 + \omega_2 R_2 = 0.6 \times 1.1 + 0.4 \times 0.9 = 1.02$$

Tale relazione si mantiene anche in considerazione dei TASSI DI RENDIMENTO. Infatti:

$$r = R - 1 = \sum_{i=1}^{n} \omega_i R_i - \underset{1=\sum_{i=1}^{n}\omega_i}{1} = \sum_{i=1}^{n} \omega_i R_i - \sum_{i=1}^{n} \omega_i = \sum_{i=1}^{n} \omega_i (R_i - 1) = \sum_{i=1}^{n} \omega_i \underset{r=R-1}{r_i}$$

Enunciamo quindi questo risultato:

RENDIMENTO DEL PORTAFOGLIO:

Il RENDIMENTO TOTALE e il TASSO DI RENDIMENTO di un portafoglio di titoli sono uguali alla somma pesata dei rendimenti dei singoli titoli nella quale il peso di ciascun titolo è dato dal suo peso relativo (in termini di costo di acquisto) nel portafoglio e cioè:

$$R = \sum_{i=1}^{m} w_i R_i \quad ; \quad r = \sum_{i=1}^{m} w_i r_i$$

→ "VARIABILI ALEATORIE"

La quantità di denaro che si riceverà dalla futura vendita di un titolo è incerta al momento dell'acquisto; in questi casi il RENDIMENTO è ALEATORIO e può essere descritto in termini probabilistici.

Cerchiamo ora di determinare MEDIA e VARIANZA DI UN TASSO DI RENDIMENTO

Abbiamo a disposizione $r_1, r_2, \dots, r_m$ i tassi di rendimento dei singoli titoli.

Allora per il VALORE ATTESO si avrà:

$$E r_1 = \bar{r}_1 \; , \; E r_2 = \bar{r}_2 \; , \; \dots \; , \; E r_m = \bar{r}_m$$ → VALORE ATTESO DEL TASSO DI RENDIMENTO

Per la VARIANZA abbiamo invece: → QUANTO IL RENDIMENTO PUÒ DISCOSTARSI DAL SUO VALORE ATTESO

$$Var(r_1) = \sigma_{11} \; , \; Var(r_2) = \sigma_{22} \; , \; \dots \; , \; Var(r_k) = \sigma_{kk}$$

Inoltre dalla definizione di $Var(x) = E(x-\bar{x})^2$ allora:

$$Var(r_1) = \sigma_{11} = E(r_1 - \bar{r}_1)^2 = E(r_1^2 - 2 r_1 \bar{r}_1 + \bar{r}_1^2) = E(r_1^2) - \overbrace{2\bar{r}_1 E(r_1)}^{2\bar{r}_1^2} + \bar{r}_1^2 = E(r_1^2) - \bar{r}_1^2$$

È utile inoltre andare ad identificare la COVARIANZA per le V.A. tassi di rendimento:

$$cov(r_1, r_2) = E(r_1 - \bar{r}_1)(r_2 - \bar{r}_2) = \sigma_{12}$$ → CI INFORMA CIRCA LA DIPENDENZA TRA DUE V.A. e CIOÈ SE LA CONOSCENZA DEL VALORE DI UNA FORNISCE INFORMAZIONI SUL VALORE DELL'ALTRA

A partire dalla definizione stessa di covarianza è possibile ricavare un ulteriore metodo di calcolo:

$$cov(r_1, r_2) = E[(r_1 - \bar{r}_1)(r_2 - \bar{r}_2)] = E(r_1 r_2) - \bar{r}_2 E(r_1) - \bar{r}_1 E(r_2) + E(\bar{r}_1 \bar{r}_2) = E(r_1 r_2) - \bar{r}_1\bar{r}_2 - \cancel{\bar{r}_1\bar{r}_2} + \cancel{\bar{r}_1\bar{r}_2}$$

$$\sigma_{12} = E(r_1 r_2) - \bar{r}_1 \bar{r}_2 \longrightarrow \boxed{N.B. \quad \sigma_{12} = \sigma_{21}}$$

Dato che il valore massimo ammissibile della covarianza è dato dal prodotto delle deviazioni standard (radice quadrata della varianza) delle singole V.A. allora dividendo il valore della covarianza per il suo valore massimo ammissibile otteniamo il COEFFICIENTE DI CORRELAZIONE

$$\rho_{12} = \frac{\sigma_{12}}{\sqrt{\sigma_{11}\sigma_{22}}}$$ con possibili valori ammissibili $-1 \leq \rho_{12} \leq 1$

-1 → MASSIMA CORRELAZIONE NEGATIVA

1 → MASSIMA CORRELAZIONE POSITIVA

$\rho_{12} = 0$ VARIABILI SCORRELATE ⟹ INDIPENDENTI

Oltre alla definizione di media, varianza, covarianza e indice di correlazione è utile andare a esaminare la VARIANZA DI UNA SOMMA DI VARIABILI ALEATORIE:

$$var(X+Y) = E(X+Y-\bar{X}-\bar{Y})^2 = E(\underbrace{X-\bar{X}+Y-\bar{Y}}_{\text{sviluppo il quadrato di binomio}})^2 = E[(X-\bar{X})^2+2(X-\bar{X})(Y-\bar{Y})+(Y-\bar{Y})^2] =$$

$$= \sigma_{xx} + 2\sigma_{xy} + \sigma_{yy}$$

→ MATRICE VARIANZA - COVARIANZA

Il calcolo della varianza di una somma di variabili aleatorie o più in generale di una combinazione lineare di variabili aleatorie può risultare un procedimento difficoltoso. Si definisce allora un procedimento semplificativo che è basato sull'utilizzo della matrice varianza covarianza.

Data una n-pla di V.A. (che per noi saranno titoli identificati da un rendimento atteso e da una varianza) costruiamo nel seguente modo Σ MATRICE VARIANZA - COVARIANZA

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \cdots & \sigma_{2n} \\ \vdots & \sigma_{ii} & \sigma_{ij} & \vdots \\ \vdots & & \sigma_{jj} & \vdots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \cdots & \sigma_{nn} \end{pmatrix}$$

Questa è una matrice $n \times n$ simmetrica poiché $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ ed è DEFINITA POSITIVA cioè il DET > 0 e i determinanti principali sono > 0.

In generale una matrice è definita positiva se $\underline{v}^T \Sigma \underline{v} > 0 \quad \forall \underline{v} \in \mathbb{R}^n$

Passiamo ora andare a vedere come attraverso l'utilizzo della matrice varianza-covarianza sia possibile giungere al medesimo risultato ottenuto per la somma di variabili aleatorie: date le V.A. X e Y allora avremo che la matrice Var-Cov sarà

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} \end{pmatrix}$$

dato che si vuole calcolare la varianza della combinazione lineare X+Y (con pesi 1 e 1) allora avremo che dalla formula generale $\underline{v}^T \Sigma \underline{v}$ otterremo:

$$(1 \;\; 1)\begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = (1 \;\; 1)\begin{pmatrix} \sigma_{xx}+\sigma_{xy} \\ \sigma_{yx}+\sigma_{yy} \end{pmatrix} = \sigma_{xx}+\sigma_{xy}+\sigma_{yx}+\sigma_{yy} =$$

$$= \sigma_{xx} + 2\sigma_{xy} + \sigma_{yy}$$

Più in generale il calcolo della varianza di una generica combinazione lineare $\alpha X + \beta Y$ sarà calcolata dal prodotto $(\alpha \;\; \beta)\begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = (\alpha \;\; \beta)\begin{pmatrix} \alpha\sigma_{xx}+\beta\sigma_{xy} \\ \alpha\sigma_{yx}+\beta\sigma_{yy} \end{pmatrix} = \alpha^2\sigma_{xx}+\alpha\beta\sigma_{xy}+\alpha\beta\sigma_{yx}+\beta^2\sigma_{yy}$

$$= \alpha^2\sigma_{xx} + 2\alpha\beta\sigma_{xy} + \beta^2\sigma_{yy}$$

Sarà analogo inoltre il calcolo della varianza di una somma di 3 V.A. $(Var(X+Y+Z))$ che si otterrà sempre con l'utilizzo di $\underline{v}^T \Sigma \underline{v}$ e cioè

$$(1 \;\; 1 \;\; 1)\begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx}+\sigma_{xy}+\sigma_{xz} \\ \sigma_{yx}+\sigma_{yy}+\sigma_{yz} \\ \sigma_{zx}+\sigma_{zy}+\sigma_{zz} \end{pmatrix}(1 \;\; 1 \;\; 1) = \sigma_{xx}+\sigma_{xy}+\sigma_{xz}+\sigma_{yx}+\sigma_{yy}+\sigma_{yz}+\sigma_{zx}+\sigma_{zy}+\sigma_{zz} =$$

$$= \sigma_{xx}+2\sigma_{xy}+2\sigma_{xz}+2\sigma_{yz}+\sigma_{yy}+\sigma_{zz}$$

→ MEDIA e VARIANZA DI UN PORTAFOGLIO

Definiti i concetti di media e varianza dei rendimenti di singoli titoli oltre alla covarianza tra coppie di titoli, andiamo ad esaminare come sia possibile utilizzarli per determinare la MEDIA e LA VARIANZA DEL RENDIMENTO DI UN PORTAFOGLIO

→ RENDIMENTO MEDIO DI UN PORTAFOGLIO

Supponiamo che siano disponibili n titoli aventi tassi di rendimento (aleatori) $r_1, r_2, \dots, r_n$

I rispettivi valori attesi sono $E(r_1)=\bar{r}_1$; $E(r_2)=\bar{r}_2$; ... ; $E(r_n)=\bar{r}_n$

Supponiamo ora di comporre un portafoglio di questi n titoli utilizzando i pesi ω_i con $i=1,2,\dots,n$

IL TASSO DI RENDIMENTO DEL PORTAFOGLIO, espresso in termini di rendimento dei singoli titoli è

$$r = \omega_1 r_1 + \omega_2 r_2 + \dots + \omega_n r_n = \sum_{i=1}^{n} \omega_i r_i$$

Ora sfruttando la linearità del valore atteso otteniamo:

$$E(r) = \omega_1 E(r_1) + \omega_2 E(r_2) + \dots + \omega_n E(r_n) = \sum_{i=1}^{n} \omega_i E(r_i) = \sum_{i=1}^{n} \omega_i \bar{r}_i$$

QUINDI IL TASSO DI RENDIMENTO MEDIO DEL PORTAFOGLIO SI DETERMINA CALCOLANDO LA SOMMA PONDERATA DEI SINGOLI TASSI DI RENDIMENTO ATTESI

→ VARIANZA DEL RENDIMENTO DEL PORTAFOGLIO

Determiniamo ora la varianza del tasso di rendimento del portafoglio denotando con σ_i^2 la VARIANZA DEL RENDIMENTO DEL TITOLO i e con σ_{ij} LA COVARIANZA DEI RENDIMENTI DEI TITOLI i e j

Partiamo dalla definizione di VARIANZA DEL TASSO DI RENDIMENTO DI UN PORTAFOGLIO:

$$Var(r) = \sigma^2 = E(r-\bar{r})^2 = E\left[\sum_{i=1}^{n}\omega_i r_i - \sum_{i=1}^{n}\omega_i \bar{r}_i\right]^2 = E\left[\sum_{i=1}^{n}\omega_i (r_i-\bar{r}_i)\right]^2 =$$

SVILUPPO IL QUADRATO $[x^2 = x \cdot x]$

$$= E\left[\sum_{i=1}^{n}\omega_i(r_i-\bar{r}_i)\cdot\sum_{j=1}^{n}\omega_j(r_j-\bar{r}_j)\right] = E\left[\sum_{i,j=1}^{n}\omega_i\omega_j(r_i-\bar{r}_i)(r_j-\bar{r}_j)\right] =$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n}\omega_i\omega_j\sigma_{xy} = \underline{\omega}^T \Sigma \underline{\omega}$$ (UTILIZZANDO LA MATRICE VARIANZA COVARIANZA)

QUINDI LA VARIANZA DEL RENDIMENTO DI UN PORTAFOGLIO PUÒ ESSERE RICAVATA DALLE COVARIANZE DELLE COPPIE DI RENDIMENTI DEI TITOLI E DAI PESI DEI TITOLI ALL'INTERNO DEL PORTAFOGLIO

- supponiamo $n=2$ allora $\sum_{i,j=1}^{2}\omega_i\omega_j\sigma_{ij} = \omega_1\omega_1\sigma_{11} + \omega_1\omega_2\sigma_{12} + \omega_2\omega_1\sigma_{21} + \omega_2\omega_2\sigma_{22} =$

$$= \omega_1^2\sigma_1^2 + 2\omega_1\omega_2\sigma_{12} + \omega_2^2\sigma_2^2 .$$

Notiamo come lo stesso risultato possa essere ottenuto tramite $\underline{\omega}^T \Sigma \underline{\omega}$:

$$(\omega_1\ \omega_2)\begin{pmatrix}\sigma_{11} & \sigma_{12}\\ \sigma_{21} & \sigma_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\omega_1\\ \omega_2\end{pmatrix} = (\omega_1\ \omega_2)\begin{pmatrix}\omega_1\sigma_{11}+\omega_2\sigma_{12}\\ \omega_1\sigma_{21}+\omega_2\sigma_{22}\end{pmatrix} = \omega_1^2\sigma_{11} + \omega_1\omega_2\sigma_{12} + \omega_1\omega_2\sigma_{12} + \omega_2^2\sigma_{22} =$$

$$= \omega_1^2\sigma_1^2 + 2\omega_1\omega_2\sigma_{12} + \omega_2^2\sigma_2^2$$

• es. 6.8 Consideriamo due titoli con:

$\bar{r}_1 = 0.12 = 12\%$ $\sigma_1 = 0.20$ $\sigma_{12} = 0.01$ $\omega_1 = 0.25$

$\bar{r}_2 = 0.15 = 15\%$ $\sigma_2 = 0.18$ $\omega_2 = 0.75$

- MEDIA PORTAFOGLIO

$$\sum_{i=1}^{m} \omega_i \bar{r}_i = 0.25 \cdot 0.12 + 0.75 \cdot 0.15 = 0.1425 = 14{,}25\%$$

- VARIANZA PORTAFOGLIO

METODO ① $$\sum_{i,j=1}^{m} \omega_i \omega_j \sigma_{ij} = \omega_1^2 \sigma_1^2 + 2\omega_1\omega_2\sigma_{12} + \omega_2^2\sigma_2^2 = (0.25^2 \cdot 0.2^2) + 2(0.25 \cdot 0.75 \cdot 0.01) + (0.75^2 \cdot 0.18^2)$$

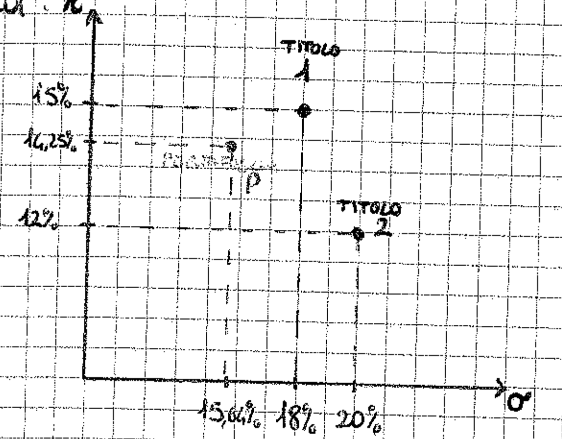
$$\sigma^2 = 0.024475$$

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = 0.1564$$

METODO ② $$\sigma^2 = \underline{\omega}^T \Sigma\, \underline{\omega} = (\omega_1 \;\; \omega_2) \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix} = \omega_1^2\sigma_1^2 + 2\omega_1\omega_2\sigma_{12} + \omega_2^2\sigma_2^2 =$$

$$\sigma^2 = 0.024475$$

Possiamo inoltre rappresentare tale situazione in un diagramma media - deviazione standard:



È possibile notare come principalmente il titolo 2 sia meno interessante rispetto al titolo 1 poiché presenta un rendimento atteso inferiore ed un maggior margine di variazione del rendimento atteso stesso.

Notiamo inoltre come da una combinazione lineare dei due titoli con pesi ω_1, ω_2 sia possibile giungere ad un portafoglio che presenta un rendimento atteso compreso tra i due rendimenti attesi dei singoli titoli ed una deviazione standard inferiore rispetto alle singole σ_1 e σ_2

→ DIVERSIFICAZIONE

I portafogli composti da pochi titoli possono essere soggetti ad un alto livello di rischio rappresentato da una VARIANZA RELATIVAMENTE ALTA. Generalmente, la varianza del rendimento di un portafoglio può essere ridotta inserendo nel portafoglio altri titoli attraverso cioè l'operazione di DIVERSIFICAZIONE.

Supponiamo ad esempio che siano disponibili molti titoli tutti tra loro incorrelati, ovvero che il rendimento di ciascun titolo non sia correlato con quello di alcun altro titolo del gruppo; supponiamo inoltre che il tasso di rendimento di ognuno di questi titoli abbia media M e varianza σ^2

Costruiamo a partire da questi un portafoglio con quantità uguali di m di ciascun titolo e cioè $\omega_i = 1/m \quad \forall i = 1, \dots, m$. Avremo allora:

TASSO DI RENDIMENTO COMPLESSIVO DEL PORTAFOGLIO $= r = \sum_{i=1}^{m} \omega_i r_i = \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{m} r_i = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} r_i \Longrightarrow$ VALORE ATTESO TASSO DI RENDIMENTO $= \bar{r} = E(r) = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} \bar{r}_i = \frac{1}{m} M \cdot m =$

$= M$ VALORE ATTESO INDIPENDENTE DA m

VARIANZA DEL TASSO DI RENDIMENTO $= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2 = \frac{\sigma^2}{n}$

SONO V.A. INCORRELATE QUINDI TUTTE LE COVARIANZE SARANNO NULLE E LA FORMULA DI CALCOLO DELLA VARIANZA $\left[\sigma^2 = \sum_{i,j=1}^{n} \omega_i \omega_j \sigma_{ij}\right]$ RISULTERÀ NON NULLA SOLO NEI CASI $i = j$

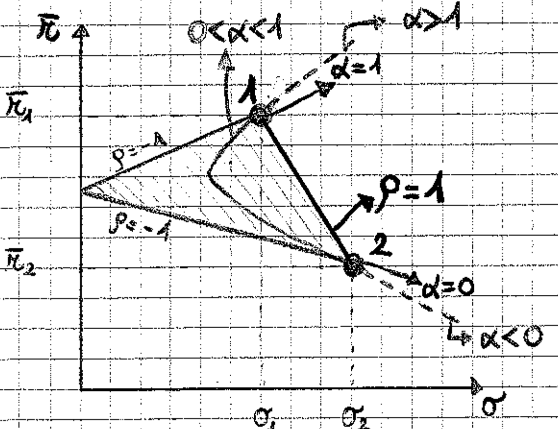
Notiamo come per questo caso particolare la VARIANZA DECRESCA RAPIDAMENTE AL CRESCERE DI n

Differente è invece il caso in cui i rendimenti dei titoli disponibili sono correlati poiché sarà necessario sacrificare in modo consistente il rendimento atteso a fronte di una piccola diminuzione della varianza. Tale considerazione è la motivazione alla base dell'approccio generale media varianza sviluppato da Markowitz che enfatizza i rapporti tra media e varianza.

Traiamo in questa sede una prima considerazione:

- SE I TASSI DI RENDIMENTO NON SONO CORRELATI attraverso la diversificazione è possibile ridurre la varianza del portafoglio sostanzialmente a 0 utilizzando un alto numero di titoli
- SE I TASSI DI RENDIMENTO SONO CORRELATI POSITIVAMENTE è più difficile ridurre la varianza e il valore di tale varianza potrebbe essere limitato inferiormente.

→ DIAGRAMMA DI UN PORTAFOGLIO



Supponiamo che due titoli vengano rappresentati in un diagramma media-deviazione standard attraverso le rispettive informazioni: $\bar{r}_1, \sigma_1$ e $\bar{r}_2, \sigma_2$.
Questi due titoli possono essere combinati con determinati pesi per comporre un portafoglio, ovvero un nuovo titolo. Il VALOR MEDIO e la DEVIAZIONE STANDARD del nuovo titolo (portafoglio) possono essere calcolati sulla base della media, varianza e covarianze dei rendimenti dei titoli originali.

Dato che le covarianze non sono rappresentate nel diagramma, l'esatta posizione del punto che rappresenta il nuovo titolo (portafoglio) non può essere ricavata dalla posizione nel diagramma dei due titoli originali. Esistono infatti una molteplicità di possibili posizioni del nuovo titolo dipendenti appunto dalla covarianza dei rendimenti dei titoli.

Analizziamo le differenti possibilità:

a partire dai due titoli (1 e 2) definiamo un'intera famiglia di portafogli introducendo la variabile α, con la quale si definiscono i pesi $\omega_1 = \alpha$ e $\omega_2 = 1-\alpha$ e cioè investo una quota α nel titolo 1 ed una quota $1-\alpha$ nel titolo 2.

Al variare di α tra 0 e 1 si avrà un portafoglio contenente solo il titolo 1 se $\alpha = 1$, una miscela dei due titoli se $0<\alpha<1$ e solo il titolo 2 se $\alpha = 0$

N.B. valori di α esterni all'intervallo $0 \leq \alpha \leq 1$ rendono negativo l'uno o l'altro peso implicando così la vendita allo scoperto.

Al variare di α i nuovi portafogli possibili formano una curva che include i titoli 1 e 2 ma la cui forma esatta dipende da σ_{12}. La parte continuata della curva corrisponde a combinazioni convesse dei due titoli $[\omega_1, \omega_2 \geq 0]$, mentre la parte tratteggiata corrisponde a vendita allo scoperto di uno dei titoli.

Si può dimostrare che la PORZIONE CONTINUA DELLA CURVA DEVE GIACERE ALL'INTERNO DELLA REGIONE TRIANGOLARE DEFINITA DAI VERTICI 1 e 2 e DAL PUNTO A SULL'ASSE VERTICALE.

DIM.

- TASSO DI RENDIMENTO e RENDIMENTO ATTESO

Il tasso di rendimento del portafoglio definito da α è $r = \sum_{i=1}^{2} \omega_i r_i = \omega_1 r_1 + \omega_2 r_2 =$
$= \alpha r_1 + (1-\alpha) r_2$

Il valore atteso di questo tasso di rendimento è, per la linearità dell'operatore valore atteso:

$$E(r) = E(\alpha r_1 + (1-\alpha) r_2) = \alpha E(r_1) + (1-\alpha) E(r_2) = \alpha \bar{r}_1 + (1-\alpha) \bar{r}_2$$

che esprime il fatto che il valore medio è compreso tra le medie originali ed è direttamente proporzionale alle quantità dei titoli, quindi (per $0 \leq \alpha \leq 1$) il valore atteso del nuovo titolo sarà contenuto tra le medie originali. I valori estremi che questo può assumere sono così identificabili:

$\alpha = 1 \xrightarrow{\text{PORTAFOGLIO COMPOSTO DAL SOLO TITOLO 1}} \bar{r} = \bar{r}_1$

$\alpha = 0 \xrightarrow{\text{PORTAFOGLIO COMPOSTO DAL SOLO TITOLO 2}} \bar{r} = \bar{r}_2$

- VARIANZA e DEVIAZIONE STANDARD

Calcoliamo la varianza del tasso di rendimento del portafoglio:

$$\sigma^2 = Var(r) = \sum_{i,j=1}^{2} \omega_i \omega_j \sigma_{ij} = \omega_1^2 \sigma_1^2 + 2\omega_1\omega_2\sigma_{12} + \omega_2^2\sigma_2^2 =$$
$$= \alpha^2 \sigma_1^2 + 2\alpha(1-\alpha)\sigma_{12} + (1-\alpha)^2 \sigma_2^2$$

Data la definizione di $\rho = \frac{\sigma_{12}}{\sigma_1 \sigma_2}$ allora $\sigma_{12} = \rho\sigma_1\sigma_2$ potendo così riscrivere la varianza come: $\sigma^2 = Var(r) = \alpha^2\sigma_1^2 + 2\alpha(1-\alpha)\rho\sigma_1\sigma_2 + (1-\alpha)^2\sigma_2^2$

Sappiamo che $-1 \leq \rho \leq 1$ quindi per $\rho = 1$ troviamo il LIMITE SUPERIORE:

$$\boxed{\rho = 1} \Longrightarrow \sigma^2 = Var(r) = \alpha^2\sigma_1^2 + 2\alpha(1-\alpha)\sigma_1\sigma_2 + (1-\alpha)^2\sigma_2^2 = (\overbrace{\alpha\sigma_1 + (1-\alpha)\sigma_2}^{\text{SE } 0\leq\alpha\leq 1 \text{ È SEMPRE POSITIVA}})^2$$

e la corrispondente DEVIAZIONE STANDARD $\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \alpha\sigma_1 + (1-\alpha)\sigma_2$ → ESPRESSIONE LINEARE IN α

Questo significa che al variare di α il portafoglio si muove lungo una retta tra 1 e 2

Per $\rho = -1$ troviamo invece il LIMITE INFERIORE:

$$\boxed{\rho = -1} \Longrightarrow \sigma^2 = Var(r) = \alpha^2\sigma_1^2 - 2\alpha(1-\alpha)\sigma_1\sigma_2 + (1-\alpha)^2\sigma_2^2 = (\overbrace{\alpha\sigma_1 - (1-\alpha)\sigma_2}^{\text{PUÒ ESSERE SIA } >0 \text{ CHE } <0})^2$$

quindi la corrispondente DEVIAZIONE STANDARD è $\sigma = \sqrt{\sigma^2} = |\alpha\sigma_1 - (1-\alpha)\sigma_2|$ che può anche essa essere considerata come espressione lineare in α e, per valori di α piccoli (prossimi allo zero) è inclinata negativamente fino ad intersecare l'asse delle ordinate, poi cambia segno, diviene inclinata positivamente fino a giungere in 1.

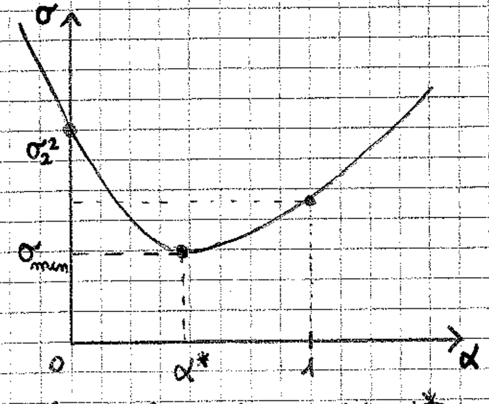
Concludiamo quindi che la curva costituita dai punti corrispondenti ai portafogli deve giacere all'interno della regione sopra costruita.

→ CALCOLO DEL VALORE DI α CHE MINIMIZZA LA VARIANZA del tasso di rendimento del portafoglio

Data la varianza in funzione di α di un portafoglio composto da una combinazione lineare dei titoli 1 e 2, e cioè:

$$Var(r) = \sigma^2 = \alpha^2 \sigma_1^2 + 2\alpha(1-\alpha)\sigma_{12} + (1-\alpha)^2 \sigma_2^2$$ che può anche essere riscritta come

IN FUNZ DI α $$= \alpha^2(\sigma_1^2 - 2\sigma_{12} + \sigma_2^2) + 2\alpha(\sigma_{12} - \sigma_2^2) + \sigma_2^2$$ e cioè una PARABOLA rispetto ad α concava verso l'alto perché il coefficiente di α^2 $\sigma_1^2 - 2\sigma_{12} + \sigma_2^2 = Var(r_1 - r_2)$ è SEMPRE POSITIVO



È possibile disegnare tale parabola imponendo:

$\alpha = 0 \Rightarrow \sigma_2^2$; $\alpha = 1 \Rightarrow \sigma_1^2$

Il minimo della funzione ottenuto in corrispondenza di α^* corrisponderà al minimo della deviazione standard e quindi della varianza del tasso di rendimento del portafoglio.

Per il calcolo esplicito di α^* possiamo così procedere:

$$\frac{d\, Var(r)}{d\alpha} = \cancel{2}\alpha(\sigma_1^2 - 2\sigma_{12} + \sigma_2^2) + \cancel{2}(\sigma_{12} - \sigma_2^2) = 0 \Rightarrow \alpha^* = \frac{\sigma_2^2 - \sigma_{12}}{\sigma_1^2 - 2\sigma_{12} + \sigma_2^2}$$

o analogamente essendo una parabola il suo punto di minimo corrisponderà a $-\frac{b}{2a}$ e quindi

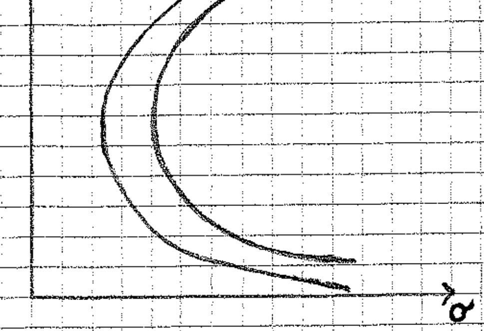
$$\alpha^* = \frac{-\cancel{2}(\sigma_{12} - \sigma_2^2)}{\cancel{2}(\sigma_1^2 - 2\sigma_{12} + \sigma_2^2)} = \frac{\sigma_2^2 - \sigma_{12}}{\sigma_1^2 - 2\sigma_{12} + \sigma_2^2}$$

Notiamo come se $\sigma_2^2 > \sigma_{12} \Rightarrow 0 < \alpha^* < 1$ ed acquistiamo quote positive di entrambi i titoli. Può però anche accadere che $\alpha^* < 0$ oppure che $\alpha^* > 1$ che sta ad indicare che il portafoglio a varianza minima ci indica una vendita allo scoperto di uno dei due titoli.

→ INSIEME POSSIBILE

Se invece di 2 sono disponibili n titoli base, possiamo rappresentarli come punti nel diagramma media-deviazione standard e immaginiamo poi di comporre dei portafogli costituiti da questi n titoli utilizzando tutti gli schemi possibili di pesi.

Avremo portafogli composti da uno solo degli n titoli fino a portafogli con combinazioni arbitrarie di tutti gli n titoli, costituiti variando i coefficienti w_i in modo da realizzare tutte le combinazioni tali che $\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$.



L'insieme dei punti corrispondenti a questi portafogli è chiamato REGIONE POSSIBILE o AMMISSIBILE. Esistono 2 definizioni della regione possibile e corrispondono rispettivamente alla possibilità di praticare la vendita allo scoperto e all'assenza di tale possibilità. La regione ammissibile che ammette la vendita allo scoperto contiene la regione definita escludendo questa opportunità.

→ INSIEME DI MINIMA VARIANZA e LA FRONTIERA EFFICIENTE

Il bordo sinistro della regione ammissibile prende il nome di INSIEME DI MINIMA VARIANZA perché per ogni valore del tasso di rendimento medio il punto possibile avente varianza (o DEV. STAND.) minima è il corrispondente punto del bordo sinistro.

In questo insieme esiste un punto speciale a varianza minima che prende il nome di PUNTO DI MINIMA VARIANZA.

Supponendo che la scelta di portafoglio di un investitore sia limitata solo a una determinata linea orizzontale ($\bar{r}$) allora tutti i portafogli su questa linea hanno stesso rendimento atteso ma deviazioni standard differenti.

La maggior parte degli investitori preferirà il portafoglio corrispondente all'estremità sinistra della linea ovvero quel punto che alla media data farà corrispondere minima deviazione standard.

Una siffatta tipologia di investitori sono detti AVVERSI AL RISCHIO

Un investitore che invece seleziona un punto differente da quello di minima deviazione standard è detto PROPENSO AL RISCHIO.

UGUALE DEVIAZIONE STANDARD

La stessa argomentazione può essere applicata ai portafogli corrispondenti ai punti di linea verticale

Gli investitori preferiranno il punto più alto della linea e sono detti INSAZIABILI poiché a parità degli altri fattori desidereranno sempre ricevere più denaro

NE DERIVA CHE GLI INVESTITORI AVVERSI AL RISCHIO e CARATTERIZZATI DA INSAZIABILITÀ saranno interessati solo dalla PARTE SUPERIORE DELL'INSIEME DI MINIMA VARIANZA A PARTIRE DAL PUNTO DI MINIMA VARIANZA.

Questa parte prende il nome di FRONTIERA EFFICIENTE della regione ammissibile e i portafogli che si trovano su di essa sono i portafogli efficienti perché per la maggior parte degli investitori offrono le migliori combinazioni MEDIA-VARIANZA.

→ MODELLO DI MARKOWITZ

Il modello di Markowitz è la formulazione di un problema matematico che ci permette di individuare i PORTAFOGLI DI MINIMA VARIANZA, ovvero quelli che si trovano sulla frontiera.

ASSUMIAMO CHE SIANO DISPONIBILI n TITOLI e PER CIASCUNO DI ESSI I TASSI DI RENDIMENTO ATTESI SONO $\bar{r}_1, \bar{r}_2, \dots, \bar{r}_n$ E LE COVARIANZE SONO σ_{ij} PER $i, j = 1, 2, \dots, n$.

OGNI PORTAFOGLIO È DEFINITO DA UNA SERIE DI n PESI w_i CON $i = 1, 2, \dots, n$ LA CUI SOMMA È 1.

Scegliamo arbitrariamente un valore medio $\bar{r}$ e troviamo il portafoglio di varianza minima tra i portafogli possibili aventi questa media.

FORMULAZIONE DEL PROBLEMA:

$$\text{MINIMIZZA} \quad \sum_{i,j=1}^{n} w_i w_j \sigma_{ij}$$

$$\text{CON VINCOLI} \quad \sum_{i=1}^{n} w_i \bar{r}_i = \bar{r}$$

$$\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$$

Il problema affronta esplicitamente la relazione tra il tasso di rendimento atteso e la varianza del tasso di rendimento di un portafoglio.

→ SOLUZIONE DEL PROBLEMA DI MARKOWITZ

Possiamo trovare le condizioni per una soluzione di questo problema utilizzando i MOLTIPLICATORI DI LAGRANGE λ e μ associati ai vincoli:
associamo λ al vincolo $\sum_{i=1}^{m} w_i \bar{r}_i = \bar{r}$ e μ a $\sum_{i=1}^{m} w_i = 1$.
Scriviamo poi la LAGRANGIANA:

$$\mathcal{L}(w_1, w_2, \dots, w_m, \lambda, \mu) = \sum_{i,j=1}^{m} w_i w_j \sigma_{ij} - \lambda\left(\sum_{i=1}^{m} w_i \bar{r}_i - \bar{r}\right) - \mu\left(\sum_{i=1}^{m} w_i - 1\right)$$

Calcoliamo poi i punti stazionari della lagrangiana differenziandola rispetto a ciascuna variabile w_i e ponendo tale derivata uguale a zero.

* SUPPONIAMO CHE $m = 2$ (2 TITOLI)

Allora $\mathcal{L}(w_1, w_2, \lambda, \mu) = \sum_{i,j=1}^{2} w_i w_j \sigma_{ij} - \lambda\left(\sum_{i=1}^{2} w_i \bar{r}_i - \bar{r}\right) - \mu\left(\sum_{i=1}^{2} w_i - 1\right) =$

$$= w_1^2 \sigma_1^2 + 2 w_1 w_2 \sigma_{12} + w_2^2 \sigma_2^2 - \lambda(w_1 \bar{r}_1 + w_2 \bar{r}_2 - \bar{r}) - \mu(w_1 + w_2 - 1)$$

Quindi:

$$\frac{d\mathcal{L}}{dw_1} = 2 w_1 \sigma_1^2 + 2 w_2 \sigma_{12} - \lambda \bar{r}_1 - \mu = 0$$

$$\frac{d\mathcal{L}}{dw_2} = 2 w_2 \sigma_2^2 + 2 w_1 \sigma_{12} - \lambda \bar{r}_2 - \mu = 0$$

che metteremo a sistema con i due vincoli:

$$\sum_{i=1}^{2} w_i \bar{r}_i = \bar{r} \Rightarrow w_1 \bar{r}_1 + w_2 \bar{r}_2 = \bar{r}$$

$$\sum_{i=1}^{2} w_i = 1 \Rightarrow w_1 + w_2 = 1$$

Notiamo come il caso con 2 titoli sia in realtà DEGENERE perché le 2 incognite w_1 e w_2 possono essere determinate unicamente dai due vincoli senza dover calcolare il valore dei moltiplicatori di Lagrange.

* PER m TITOLI

Per un portafoglio efficiente avente tasso di rendimento medio $\bar{r}$, gli n pesi w_i per $i=1,\dots,n$ e i due moltiplicatori di Lagrange λ e μ soddisfano

$$\sum_{j=1}^{m} \sigma_{ij} w_j - \lambda \bar{r}_i - \mu = 0 \qquad i = 1, 2, \dots, m$$

a sistema con

$$\sum_{i=1}^{m} w_i \bar{r}_i = \bar{r}$$

$$\sum_{i=1}^{m} w_i = 1$$

Abbiamo quindi le n equazioni e le due equazioni dei vincoli per un totale di $n+2$ equazioni; corrispondentemente abbiamo $n+2$ incognite ovvero gli n valori di w_i più λ e μ.
Risolvendo queste equazioni si ottengono i pesi di un portafoglio efficiente con media $\bar{r}$

• esempio 6.9 — 3 TITOLI NON CORRELATI —

Supponiamo vi siano 3 titoli non correlati tutti con varianza 1 $(\sigma_1^2=1;\ \sigma_2^2=1;\ \sigma_3^2=1)$ e con valori medi $(\bar{r}_1=1;\ \bar{r}_2=2;\ \bar{r}_3=3)$. Essendo tra di loro non correlati si avrà $\sigma_{12}=0,\ \sigma_{13}=0,\ \sigma_{23}=0$ e la corrispondente matrice Σ varianza covarianza sarà

$$\Sigma=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

Impostiamo ora il problema; in generale con n titoli occorre unire a $\sum_{j=1}^{n}\sigma_{ij}\omega_j-\lambda\bar{r}_i-\mu=0$ (per $i=1,n$) i vincoli dei due titoli $\sum_{i=1}^{n}\omega_i\bar{r}_i=\bar{r}$ e $\sum_{i=1}^{n}\omega_i=1$.

Comunque le varie espressioni delle derivate parziali della lagrangiana possono altresì essere ottenute con $\Sigma\,\underline{\omega}-\lambda\,\underline{\bar{r}}-\mu\,\underline{1}=0$. In questo caso avremo quindi

$$\begin{cases}1\cdot\omega_1+0\cdot\omega_2+0\cdot\omega_3-\lambda\cdot1-\mu=0\\0\cdot\omega_1+1\cdot\omega_2+0\cdot\omega_3-\lambda\cdot2-\mu=0\\0\cdot\omega_1+0\cdot\omega_2+1\cdot\omega_3-\lambda\cdot3-\mu=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\omega_1-\lambda-\mu=0\\\omega_2-2\lambda-\mu=0\\\omega_3-3\lambda-\mu=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\omega_1=\lambda+\mu\\\omega_2=2\lambda+\mu\\\omega_3=3\lambda+\mu\end{cases}*$$

con i vincoli $\begin{cases}\sum_{i=1}^{n}\omega_i\bar{r}_i=\bar{r}\\\sum_{i=1}^{n}\omega_i=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\omega_1+2\omega_2+3\omega_3=\bar{r}\\\omega_1+\omega_2+\omega_3=1\end{cases}\overset{*}{\Rightarrow}\begin{cases}\lambda+\mu+2(2\lambda+\mu)+3(3\lambda+\mu)=\bar{r}\\\lambda+\mu+2\lambda+\mu+3\lambda+\mu=1\end{cases}\Rightarrow$

$$\Rightarrow\begin{cases}14\lambda+6\mu=\bar{r}\\6\lambda+3\mu=1\end{cases}\rightarrow\begin{cases}14\lambda+6\left(\frac{1}{3}-2\lambda\right)=\bar{r}\\\mu=\frac{1}{3}-2\lambda\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}14\lambda+2-12\lambda=\bar{r}\\\mu=\frac{1}{3}-2\lambda\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\lambda=\frac{\bar{r}}{2}-1\\\mu=\frac{7}{3}-\bar{r}\end{cases}$$

* le sostituisco in $\omega_1,\omega_2,\omega_3$

$$\omega_1=\frac{\bar{r}}{2}-1+\frac{7}{3}-\bar{r}=\frac{4}{3}-\frac{\bar{r}}{2}$$

$$\omega_2=2\left(\frac{\bar{r}}{2}-1\right)+\frac{7}{3}-\bar{r}=\frac{1}{3}$$

$$\omega_3=3\left(\frac{\bar{r}}{2}-1\right)+\frac{7}{3}-\bar{r}=\frac{\bar{r}}{2}-\frac{2}{3}$$

dove $\bar{r}$ è un parametro: se volessi un rendimento atteso del 400% allora dovrei sostituire $\bar{r}=4$ e otterrei $\omega_1=-\frac{2}{3}$ (VENDITA ALLO SCOPERTO TITOLO 1)

$\omega_2=\frac{1}{3}$

$\omega_3=\frac{4}{3}$ (VADO LUNGO SUL TITOLO 3)

Per calcolare la VARIANZA DI QUESTO PORTAFOGLIO

Dalla formula generale della varianza $\sum_{j,i=1}^{n}\omega_i\omega_j\sigma_{ij}=\underline{\omega}^T\,\Sigma\,\underline{\omega}$ ottengo:

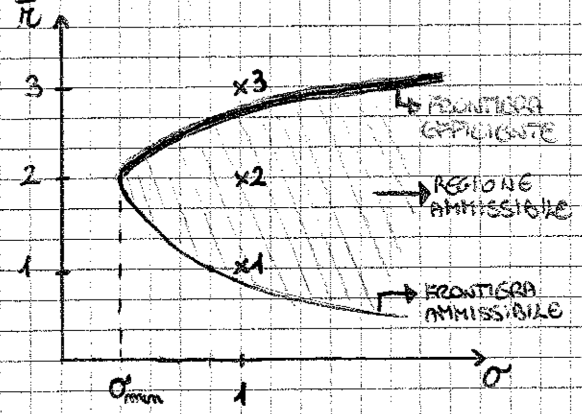
$$(\omega_1\ \omega_2\ \omega_3)\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\omega_1\\\omega_2\\\omega_3\end{pmatrix}=(\omega_1\ \omega_2\ \omega_3)\begin{pmatrix}\omega_1\\\omega_2\\\omega_3\end{pmatrix}=\omega_1^2+\omega_2^2+\omega_3^2=$$

$$=\left(\frac{4}{3}-\frac{\bar{r}}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{\bar{r}}{2}-\frac{2}{3}\right)^2=\frac{7}{3}-2\bar{r}+\frac{\bar{r}^2}{2}=\mathrm{Var}(r)=\sigma^2$$ → È l'equazione della frontiera ammissibile

Cerchiamo ora il punto in cui questa è minima: possiamo operare $\frac{\delta\,\mathrm{Var}(r)}{\delta\bar{r}}=0$ oppure essendo una parabola questa avrà il suo minimo in corrispondenza di $-b/2a$ e cioè

$\frac{\cancel{-}2}{2\,{}^1\!/_2}=2=\bar{r}$. Quindi in $\bar{r}=2$ questa avrà varianza minima pari a $1/3$ e quindi DEV. STANDARD pari a $\sqrt{1/3}=0.58$

Riportiamo graficamente la situazione nel grafico media - deviazione standard:



→ VEDERE SE UN TITOLO È EFFICIENTE (SE È SULLA FRONTIERA EFFICIENTE)

→ TEOREMA DEI DUE FONDI

La frontiera ammissibile o insieme di minima varianza gode di un'importante proprietà.
I punti di questo insieme soddisfano il sistema di $n+2$ equazioni lineari:

$$\sum_{j=1}^{n} \omega_j \sigma_{ij} - \lambda \bar{r}_i - \mu = 0 \qquad \text{per } i=1,\dots,n \rightarrow n \text{ equazioni.}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_i \bar{r}_i = \bar{r}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_i = 1$$

Supponiamo siano note due soluzioni $\underline{\omega}^1 = (\omega_1^1, \omega_2^1, \dots, \omega_n^1), \lambda^1, \mu^1$ e $\underline{\omega}^2 = (\omega_1^2, \omega_2^2, \dots, \omega_n^2), \lambda^2, \mu^2$ con tassi di rendimento attesi $\bar{r}_1$ e $\bar{r}_2$

Formiamo una combinazione moltiplicando la prima per α e la seconda per $1-\alpha$.
Per SOSTITUZIONE DIRETTA vediamo che tale somma È ANCORA SOLUZIONE DELLE $n+2$ EQUAZIONI e corrisponde al valore atteso $\alpha \bar{r}^1 + (1-\alpha)\bar{r}^2$

Osserviamo infatti che $\alpha \underline{\omega}^1 + (1-\alpha)\underline{\omega}^2$ è un portafoglio legittimo con pesi la cui somma è 1, quindi il vincolo $\sum_{i=1}^{n} \omega_i = 1$ è soddisfatto.
Inoltre il rendimento atteso è $\alpha \bar{r}_1 + (1-\alpha)\bar{r}_2$ e quindi per tale anche $\sum_{i=1}^{n} \omega_i \bar{r}_i = \bar{r}$ è soddisfatto.

Infine poiché entrambe le soluzioni rendono uguale a zero il membro sinistro delle n equazioni del sistema di Lagrange allora lo stesso vale per la loro combinazione ed anche $\sum_{j=1}^{n} \omega_j \sigma_{ij} - \lambda \bar{r}_i - \mu = 0$ $i=1,\dots,n$ sono soddisfatte.
QUESTO IMPLICA CHE ANCHE IL PORTAFOGLIO COMBINATO $\alpha \underline{\omega}^1 + (1-\alpha)\underline{\omega}^2$ È UNA SOLUZIONE e cioè rappresenta un punto dell'insieme di minima varianza

- Supponiamo che $\underline{\omega}^1$ e $\underline{\omega}^2$ sono due differenti portafogli dell'insieme di minima varianza allora al variare di α nell'intervallo $-\infty < \alpha < \infty$, i portafogli definiti da $\alpha \underline{\omega}^1 + (1-\alpha)\underline{\omega}^2$ coprono l'intero insieme di minima varianza.

Ovviamente possiamo scegliere come soluzioni iniziali due soluzioni efficienti (appartenenti alla porzione superiore dell'insieme di minima varianza), e QUESTE GENERERANNO TUTTI GLI ALTRI PUNTI EFFICIENTI.

* TEO. DUE FONDI

È possibile individuare due fondi (portafogli) efficienti tali che tutti i portafogli efficienti possono essere riprodotti, in termini di media e di varianza, come loro combinazione.
Cioè, per gli investitori che cercano portafogli efficienti è sufficiente investire in combinazioni di questi due fondi.

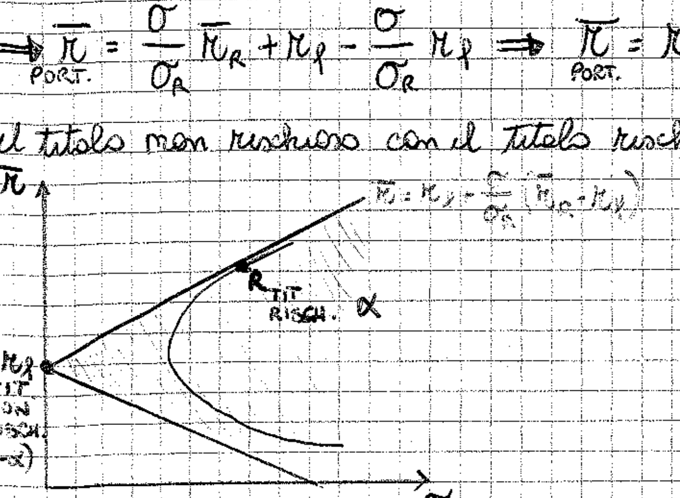
→ TEOREMA DI UN FONDO

Fino ad ora abbiamo implicitamente assunto che gli n titoli disponibili fossero rischiosi e cioè che ognuno di essi avesse $\sigma > 0$.
I titoli non rischiosi hanno rendimenti deterministici (noti con certezza) e quindi $\sigma = 0$; sono quindi strumenti puramente fruttiferi e la loro inclusione nel portafoglio corrisponde alla concessione o all'ottenimento di un prestito al tasso senza rischio.
Tale inclusione di un titolo non rischioso tra quelli disponibili è necessaria per realismo: gli investitori hanno costantemente la possibilità di ottenere o concedere prestiti e tale inclusione di un titolo non rischioso introduce una degenerazione matematica che semplifica la forma della frontiera efficiente.
Supponiamo che sia disponibile un titolo non rischioso con tasso di rendimento r_f.
Consideriamo un altro titolo rischioso con tasso di rendimento r_R con media $\bar{r}_R$ e varianza σ_R^2
La covarianza di questi due rendimenti deve essere zero essendo $\sigma_{fR} = E[(r_R - \bar{r}_R)(r_f - r_f)] = 0$
Supponiamo ora di combinare questi due titoli per formare un portafoglio utilizzando il peso $1-\alpha$ per il titolo non rischioso e il peso α per il titolo rischioso con $\alpha \leq 1$
Il tasso di rendimento medio di questo portafoglio sarà $\alpha \bar{r}_R + (1-\alpha) r_f$ e la deviazione standard del rendimento sarà $\sqrt{\alpha^2 \sigma_R^2} = \alpha \sigma_R$ perchè il rendimento del titolo non rischioso ha varianza pari a zero e covarianza nulla con il rendimento del titolo rischioso; l'unico termine rimanente nella formula è quello relativo al titolo rischioso.
Dalla def di DEVIAZIONE STANDARD del portafoglio possiamo esplicitare α;

$\sigma_{PORTAFOGLIO} = \alpha \sigma_R \Longrightarrow \alpha = \dfrac{\sigma}{\sigma_R}$ che possiamo sostituire nella formula del rendimento medio del portafoglio ottenendo $\bar{r}_{PORTAFOGLIO} = \dfrac{\sigma}{\sigma_R}\bar{r}_R + \left(1 - \dfrac{\sigma}{\sigma_R}\right) r_f \Longrightarrow$

$$\Longrightarrow \bar{r}_{PORT.} = \frac{\sigma}{\sigma_R}\bar{r}_R + r_f - \frac{\sigma}{\sigma_R} r_f \Longrightarrow \bar{r}_{PORT.} = r_f + \frac{\sigma}{\sigma_R}\left(\bar{r}_R - r_f\right)$$

che è una retta che unisce il titolo non rischioso con il titolo rischioso.



Se nel formare queste combinazioni ammettiamo che il titolo non rischioso possa essere prestato o ricevuto in prestito, mentre i titoli rischiosi possono essere solo acquistati, allora dalle nuove combinazioni è possibile identificare una semiretta per ciascun titolo rischioso che si origina dal titolo non rischioso. L'insieme di queste rette forma una regione possibile di forma triangolare.
Quando tra i titoli disponibili viene incluso un titolo non rischioso la regione possibile è un triangolo infinito.