MATEMATICA PER LE APPLICAZIONI ECONOMICHE

Formulario (v. 12-4-2012)

- Leggi di capitalizzazione.
  1. Interessi semplici: $A_t = A_0(1 + rt)$
  2. Interessi composti: $A_t = A_0(1 + r)^t$
  3. Interessi composti, con accredito degli interessi m volte per anno: $A_t = A_0(1 + \frac{r}{m})^{mt}$
  4. Capitalizzazione continua degli interessi: $A_t = A_0 \exp(rt)$
- Inflazione. Se f è il tasso di inflazione e r è il tasso nominale, allora il tasso reale è

$$r_0 = \frac{1 + r}{1 + f} - 1$$

- Rendite.
  1. finita, posticipata:

$$a_{\overline{r}|n} = \frac{1 - (1 + r)^{-n}}{r}$$

  2. finita, anticipata:

$$\ddot{a}_{\overline{r}|n} = (1 + r)a_{\overline{r}|n}$$

  3. infinita, posticipata:

$$a_{\overline{r}|\infty} = \frac{1}{r}$$

- Duration di un flusso di importi $\{x_1, \ldots, x_n\}|\{t_1, \ldots, t_n\}$:

$$D = \frac{\sum_{k=1}^{n} t_k x_k (1 + r)^{-t_k}}{\sum_{k=1}^{n} x_k (1 + r)^{-t_k}}$$

- Duration di un obbligazione che paga cedole ogni m-periodi dell'anno:

$$D = \frac{1 + y}{my} - \frac{1 + y + n(c - y)}{mc[(1 + y)^n - 1] + my},$$

  con y rendimento periodale, c tasso cedolare periodale, n numero dei periodi.
- Duration di un portafoglio di due asset a rendimento certo:

$$D = \frac{V_A}{V_A + V_B} D_A + \frac{V_B}{V_A + V_B} D_B$$

- Relazione tra derivata del valore attuale rispetto al tasso di interesse e Duration.
  Sia $V(r) = \sum_{k=1}^{n} x_k (1 + r)^{-t_k}$ il valore attuale, allora:

$$\frac{dV(r)}{dr} = -\frac{D}{1 + r} V(r)$$

- Relazione tra fattori di sconto a termine:

$$d_{i,j} = d_{i,k} d_{k,j}$$

  con $d_{i,j} = (1 + f_{i,j})^{-(j-i)}$, $f_{i,j}$ tasso a termine (concordato a $t = 0$) valevole per l'intervallo $[i, j]$.
- Varianza di un portafoglio composto da due titoli con pesi α e $1 - \alpha$

$$\sigma^2 = \alpha^2 \sigma_1^2 + 2\alpha(1 - \alpha)\sigma_{1,2} + (1 - \alpha)^2 \sigma_2^2$$

- Equazioni dell'insieme dei portafogli efficienti in media-varianza (con possibilità di vendita allo scoperto):

$$\sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij} w_j - \lambda \overline{r}_i - \mu = 0, \quad i = 1, \ldots, n$$

  ed inoltre $\sum_{i=1}^{n} w_i \overline{r}_i = \overline{r}$ e $\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$.