13.5.2013

Se il TIR è del $\tau_s = 50\%$ su base semestrale, qual è il TIR annuo?

. Dipende dalla legge di capitalizzazione utilizzata

Se $\quad m(t) = (1+i)^t$

$$(1+\tau_s)^2 = (1+i)$$

$$i = (1+\tau_s)^2 - 1$$

Se la legge di cap. è composta con periodo m

(es $\underline{m=2 \text{ semestre}}$)

$$m(t) = \left(1 + \frac{i}{m}\right)^{m \cdot t}$$

$$t = 1/2$$

$$1 + r_s = \left(1 + \frac{i}{2}\right)^{\cancel{2} \cdot 1/\cancel{2}}$$

$$i = 2 \cdot r_s$$

E' il caso dello ytm

Es. Il BTP con TAN = $\boxed{4\%}$ e scadenza tra 10 anni esatti $\boxed{\text{quota alla pari}}$. Qual è il suo ytm?

$\underline{I}$ ← cedola semestrale

$\underline{I} = 2$ $\qquad$ $C = 100$

$\tau_s = \underline{I}/100 = 2\%$

$ytm = 2 \cdot \tau_s = \boxed{4\%}$

Prezzo di un'obbligazione in funzione dello ytm

$F \to$ valore facciale

$C \to$ "cedola annua"

$I = C/m$

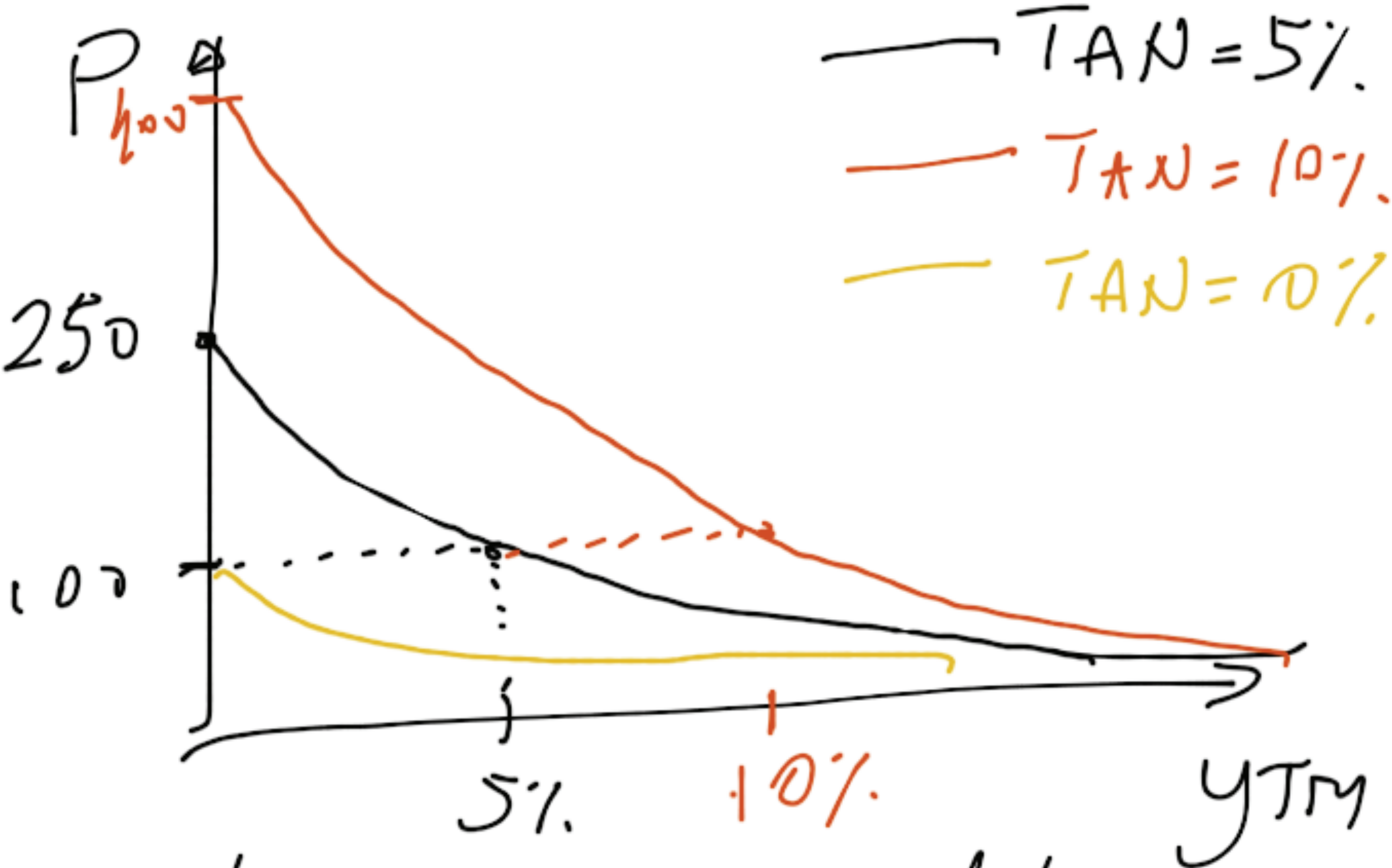
$\lambda =$ y.t.m.

$\boxed{n \text{ cedole}}$

$$P = F d_p^n + I \cdot \frac{1 - d_p^n}{\tau_p}$$

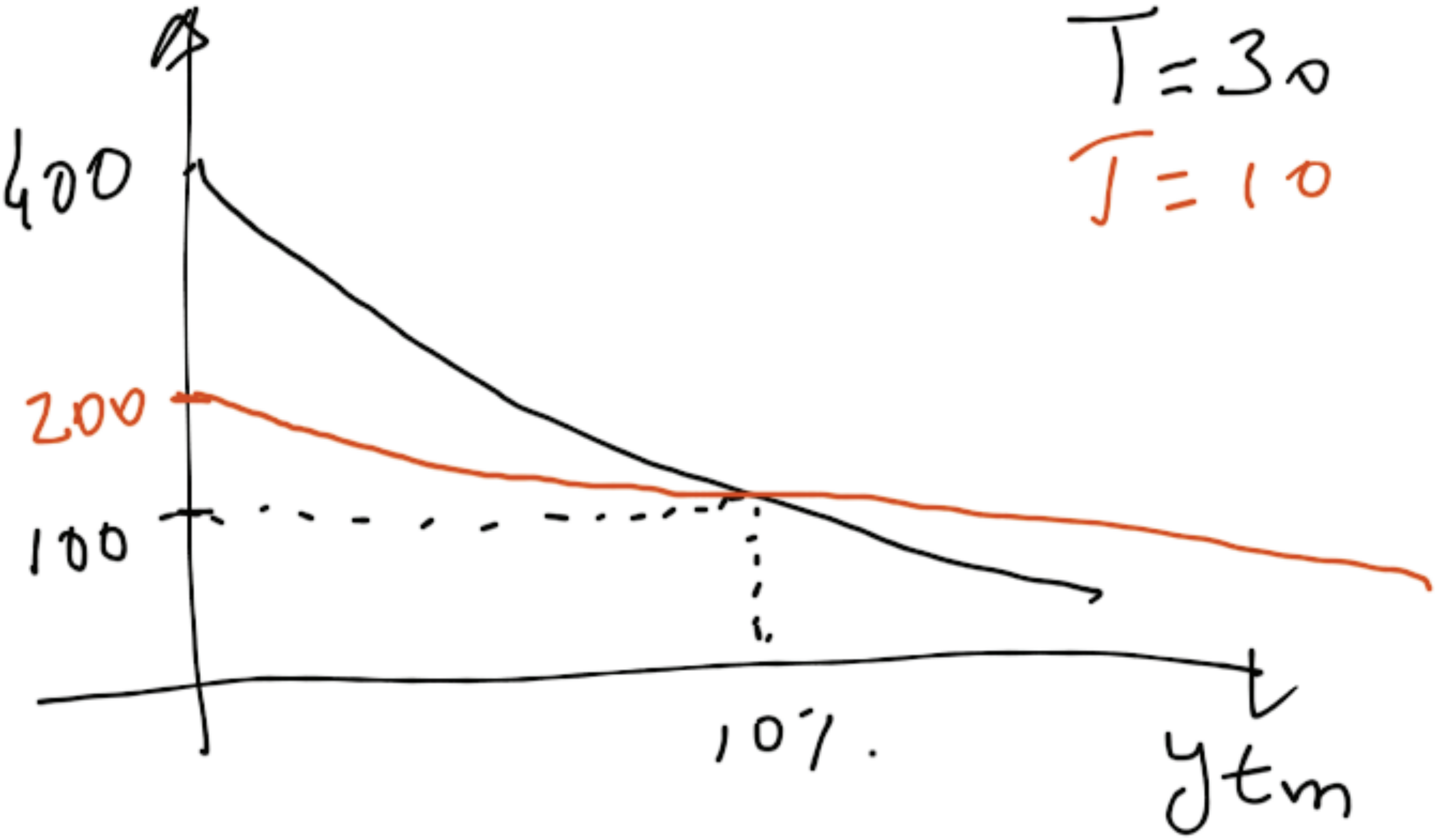
$$\tau_p = \lambda / m \qquad d_p = (1 + \tau_p)^{-1}$$

Curve prezzo - ytm



obbligaz. con cedole annuali

T = 30



TAN = 10 %

14.5.2013

Sensibilità del prezzo di un'obblig. rispetto ai tassi di mercato

consideriamo un flusso

$\underline{x}/\underline{t} = (x_1, x_2, \dots x_n)/(t_1, \dots, t_n)$

$$x_i \geq 0 \quad \forall i$$

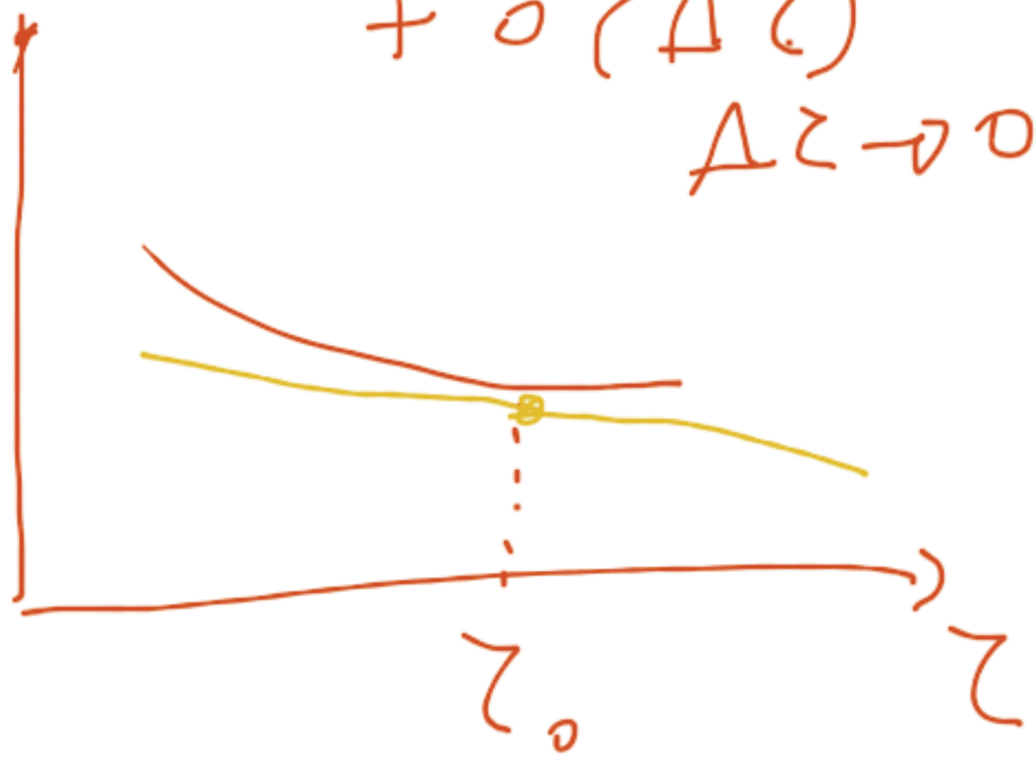
Valore attuale del flusso

$$V(z) = \sum_{k=1}^{n} x_k (1+z)^{-t_k}$$

$$\frac{V(\tau_0+\Delta\tau)-V(\tau_0)}{V(\tau_0)}$$

$$V(\tau_0+\Delta\tau)\simeq V(\tau_0)+V'(\tau_0)\Delta\tau + o(\Delta\tau)$$

$$\Delta\tau\to 0$$



$$\frac{V'(r_0)\Delta r}{V(r_0)}$$

$$V(r) = \sum_{k=1}^{n} x_k (1+r)^{-t_k}$$

$$V'(r) = \sum_{k=1}^{n} -t_k x_k (1+r)^{-t_k - 1}$$

$$= -\frac{1}{1+r} \sum_{k=1}^{n} t_k x_k (1+r)^{-t_k}$$

$$\frac{V'(\tau_0)}{V(\tau_0)} = -\frac{1}{1+\tau_0}\left[\frac{\sum_{k=1}^{n} x_k t_k (1+\tau_0)^{-t_k}}{V(\tau_0)}\right]$$

Duration MODIFICATA

DURATION

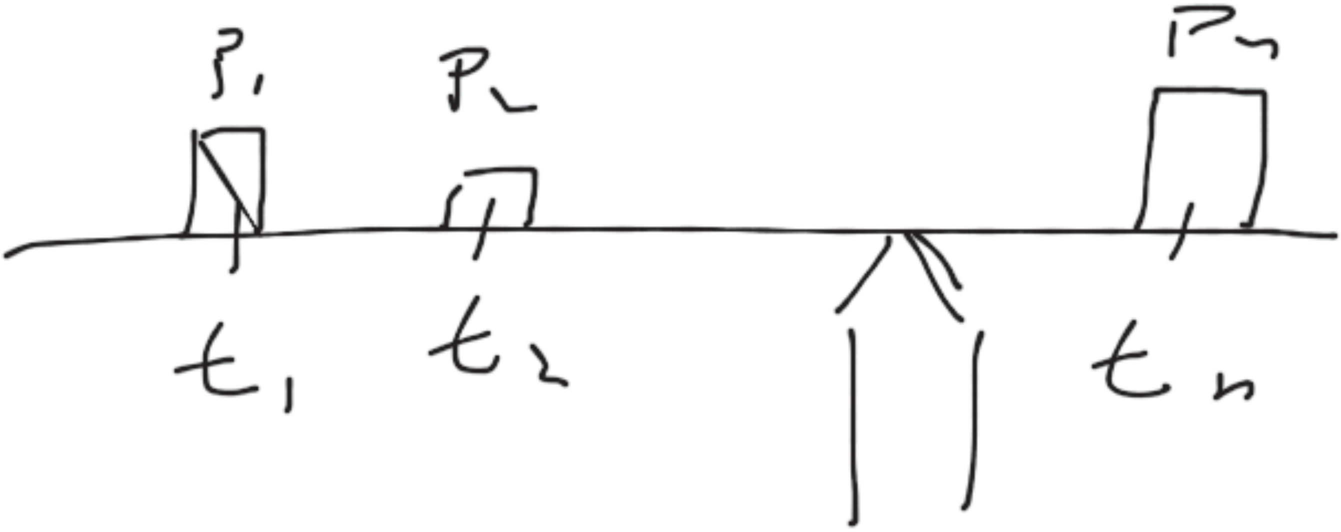
di $\underline{x}\,|\,t$

La duration è una media pesata dei tempi di pagamento.

I pesi sono

$$p_k = \frac{x_k (1+i)^{-t_k}}{\sum_k x_k (1+i)^{-t_k}}$$

$$p_k \geq 0 \quad e \quad \sum_{k=1}^{n} p_k = 1$$



Per uno zcb la duration coincide con la maturity.

$\Downarrow$

La duration è sempre compresa tra t_1 e t_n

Cambiamo legge di capitalizzazione

$$A(t) = e^{-r \cdot t}$$

$$V'(r) = \frac{d}{dr} \sum_{k=1}^{n} x_k e^{-r t_k}$$

$$= -\sum_{k=1}^{n} t_k x_k e^{-r t_k}$$

$$\frac{V'(r)}{V(r)} = -\frac{\sum_{k=1}^{n} t_k x_k e^{-r t_k}}{\sum_{k=1}^{n} x_k e^{-r t_k}}$$

IN GENERALE

$$D = \frac{\sum_{k=1}^{n} x_k t_k \, d(t_k)}{\sum_{k=1}^{n} x_k \, d(t_k)}$$

$$d(t_k) = (1+r)^{-t_k}$$

$$= e^{-r t_k}$$

$$= \left(1+\frac{r}{m}\right)^{-m \cdot t_k}$$

A cosa è uguale

$$\frac{V'(z_0)}{V(z_0)}$$

quando si usa la legge

$$d(t_k) = \left(1 + \frac{r}{m}\right)^{-m t_k}$$

15.5.2013

Consideriamo la legge di cap.

$$d(t) = (1+r)^{-t}$$

· Ho investito 5000 €
in un titolo con ytm = 5%
e duration D = 10 anni
Se la ytm <u>aumenta</u> di
10 bp = 0.1% = 0.001
Cosa succede al val. del mio inv.

$$\frac{V(r_0+\Delta r)-V(r_0)}{V(r_0)} \approx -\frac{1}{1+r_0} D \cdot \Delta r$$

$$= -\frac{1}{1.05} \cdot 1\cancel{0} \cdot \frac{1}{100\cancel{0}}$$

$$= -\frac{1}{105} \approx -1\%$$

Duration di un portafoglio

Sia V_A e D_A il val. attuale e la duration del t.t. A.

V_B e D_B → t.t. B

Costruisco un ptf composto da α quote di A e β quote di B.

Valore attuale del portafoglio

$$V = \alpha V_A + \beta V_B$$

$$D = \frac{\alpha V_A}{V} D_A + \frac{\beta V_B}{V} D_B$$

Es.

$2\,M$ in $D_1 = 1$

$5\,M$ $\quad D_2 = 5$

$8\,M$ $\quad D_3 = 20$

$15\,M$

$$D = \frac{2}{15} \cdot D_1 + \frac{5}{15} D_2 + \frac{8}{15} D_3$$

Duration di una rendita infinita posticipata con pagamenti annuali.

$$D = \frac{\sum_{k=1}^{\infty} \cancel{I} \cdot k \cdot (1+r)^{-k}}{\sum_{k=1}^{\infty} \cancel{I} (1+r)^{-k}}$$

$$V(r) = I / r$$

$$\frac{V'(\tau)}{V(\tau)} = -\frac{D}{1+\tau}$$

$$V(\tau) = I/\tau$$

$$V'(\tau) = -I/\tau^2$$

$$D = -(1+\tau)\cdot\frac{V'(\tau)}{V(\tau)} =$$

$$= -(1+\tau)\,\frac{-I/\tau^2}{I/\tau} = \frac{1+\tau}{\tau}$$

. Calcolare la duration di una rendita infinita anticipata

Calcolare la duration di una rendita infinita posticipata con pagamenti mensili, assumendo che il primo pag. sarà tra 6 mesi

Rispetto a un tasso di interesse $r = 10\%$ è più rischioso investire in una rendita infinita posticipata o in un BOT con scadenza in $T = 5y$?

Calcolare la duration di una rendita infinita posticipata rispetto a un tasso annuo $i = 5\%$.

assumendo pagamenti:

- annuali
- semestrali
- mensili

3.6 Immunizzazione

Scopo: costruire un portafoglio di attivi che abbia la stessa duration dei passivi (e stesso val. attuale)

$$\begin{cases} x \cdot V_A + y V_B = V_P \\ \dfrac{x V_A}{\cancel{V_P}} D_A + \dfrac{y V_B}{\cancel{V_P}} D_B = D_P V_P \end{cases}$$

Risolviamo il sistema

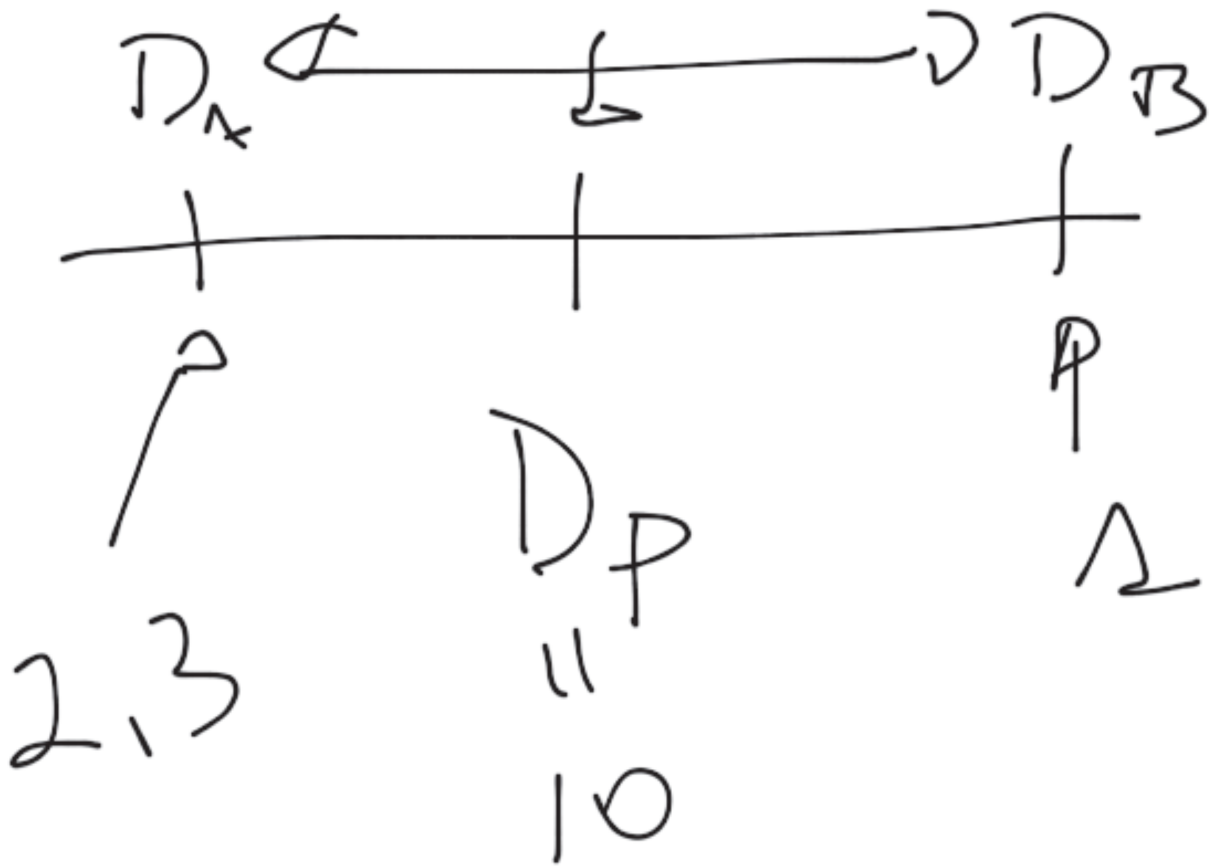
$$\Delta = \begin{vmatrix} V_A & V_B \\ V_A D_A & V_B D_B \end{vmatrix} =$$

$$= V_A V_B D_B - V_A V_B D_A$$

$$= V_A V_B (D_B - D_A)$$

$$X = \frac{\begin{vmatrix} V_P & V_B \\ V_P D_P & V_B D_B \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{V_B V_P (D_B - D_P)}{\Delta}$$

$$= \frac{V_P (D_B - D_P)}{V_A (B_B - D_A)} \qquad y = \dots$$


D_A
D_B
D_P
2,3
10