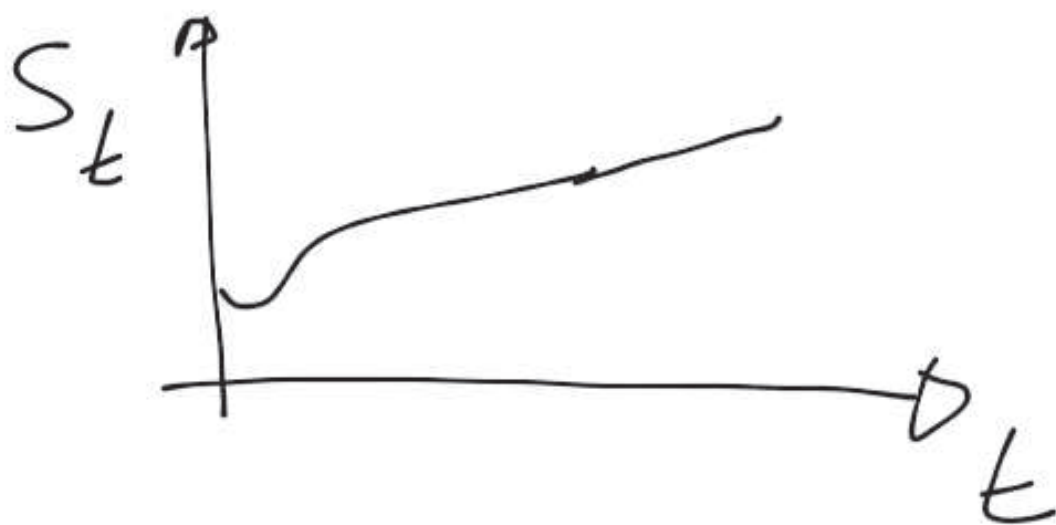


20 Maggio 2013

Struttura per scadenza
dei tassi di interesse.



s_t \neq "spot rate"

$$d_t = (1 + s_t)^{-t}$$

$$= e^{-s_t t}$$

$$= \left(1 + \frac{s_t}{m}\right)^{m t}$$

$$S(t_0, t)$$

\nearrow S casuale
 ist. attuale

$$S_t = S(0, t)$$

$$d(t_0, t) = (1 + S(t_0, t))^{-(t - t_0)}$$

è il prezzo a pronti
 di uno z.c.b. unitario
 che scade in t

Es. 4.1 pag. 79

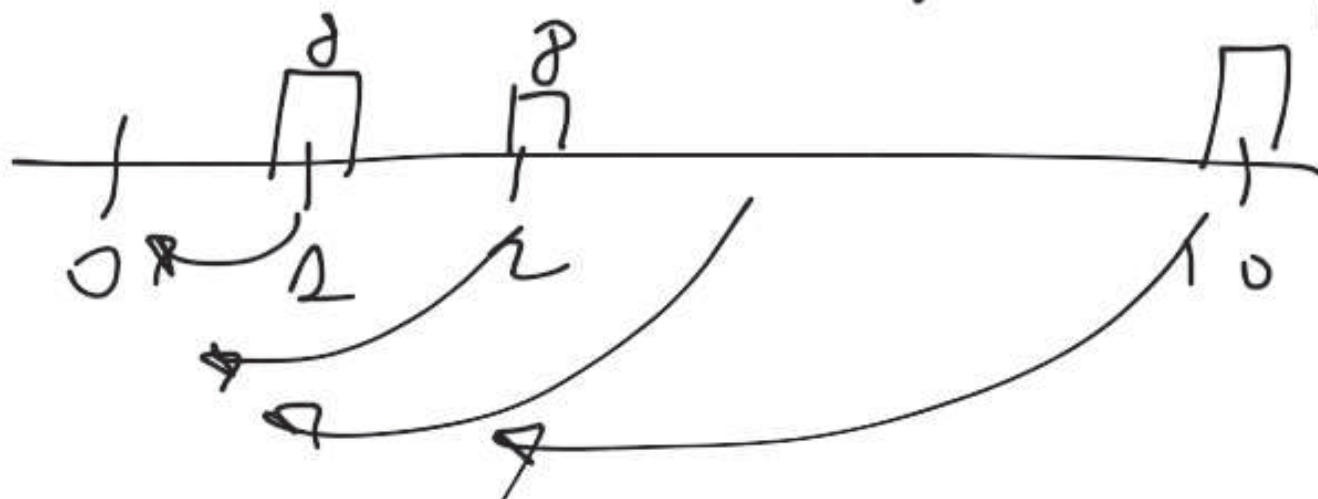
$$S_1 = 5.571\% \quad S_2 = 6.888\%$$

$$S_3 = 6.555\% \quad \dots$$

TAX = 8% < rate annui

Scadenza $T = 10$

calcolare il prezzo ^{oggi}



$$d_1 = (1 + s_1)^{-1} =$$

$$= (1.05571)^{-1} =$$

$$= 0.947$$

$$d_2 = (1 + s_2)^{-2} =$$

$$= (1.06088)^{-2} =$$

$$= 0.889$$

$$P = 8(d_1 + d_2 + d_3 + \dots + d_{10})$$

$$+ 100 d_{10} = 97.34$$

Le procedure dei
dei posti di mercato
delle obbligazioni (o
altri titoli) permette
di ricavare i tassi
spot si chiama

"BOOTSTRAP"

Esempio.

$$\begin{aligned} A & (100, 0, 0) \mid (1, 2, 3) \quad P_A = 94 \\ B & (10, 110, 0) \mid (1, 2, 3) \quad P_B = 102 \\ C & (3, 5, 105) \mid (1, 2, 3) \quad P_C = 98 \end{aligned}$$

1. Calcolare i fattori di
scarto

$$P_A = 100 d_1$$

$$P_B = 10 d_1 + 110 d_2$$

$$P_C = 5 d_1 + 5 d_2 + 195 d_3$$

$$d_1 = 94/100$$

$$d_2 = \frac{162 - 10 \cdot d_1}{110}$$

$$d_3 = \frac{98 - 5 d_1 - 5 d_2}{195}$$

2. Calcolo i tassi spot

$$(1 + S_t)^{-t} = d_t$$

$$1 + S_t = d_t^{-1/t}$$

$$S_1 = d_1^{-1} - 1$$

$$S_2 = d_2^{-1/2} - 1$$

$$S_3 = d_3^{-1/3} - 1$$



In generale
 dato N obbligazioni
 e m date di pagamento.

$$\vec{P} = \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ P_N \end{pmatrix} \leftarrow \begin{matrix} \text{prezzi} \\ \text{obblig.} \end{matrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{N1} & \dots & & a_{Nm} \end{pmatrix}$$

\leftarrow Payment:

$$\vec{d} = \begin{pmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_m \end{pmatrix}$$

$$\vec{p} = A \vec{d}$$

N eq. in m unknowns

$$\text{rank}(A | \vec{p}) = \text{rank}(A) = k$$

il sistema ha soluzioni

∞^{m-k} \rightarrow numero
soluzioni

ES. 4.3 pg 80

$$A, T=10, I_A=10, P_A=98.77$$

$$B, 10, I_B=8, P_B=85.89$$

costumiso un portafolio
compuesto de 10 obbl. B

e - 8 obbl. A. Ottengo

il flusso

(0, 0, 0, ..., 200)

al costo

$$10 \cdot P_B - 8 P_A = 68.76$$

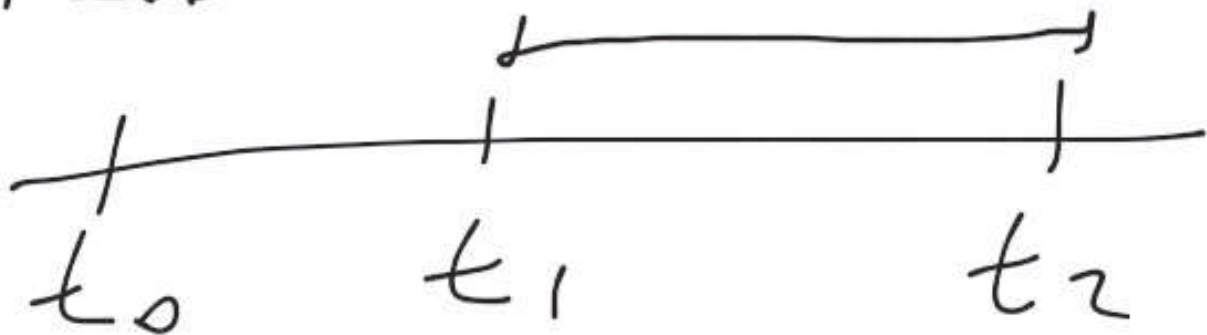
$$200 \cdot d_{10} = 68.74$$

$$d_{10} = \frac{68.74}{200}$$

$$S_{10} = d_{10} - \frac{1}{10} - 1$$

$$= 11.2\%$$

Tassi e termine



$$f(t_0, t_1, t_2)$$

istante di stipula

intervallo
del prest. f.

$$f(0, 1, 4) = 5\%$$

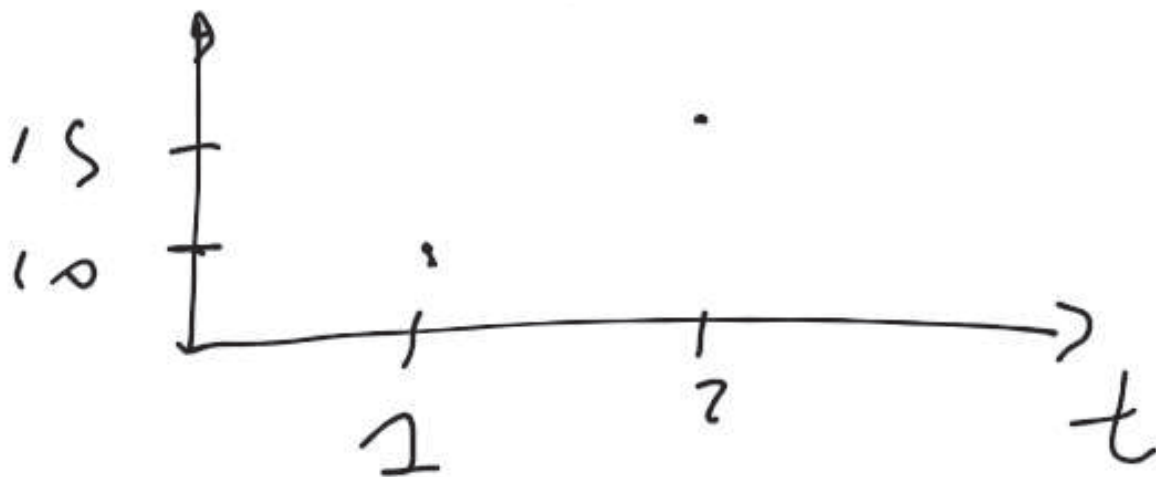
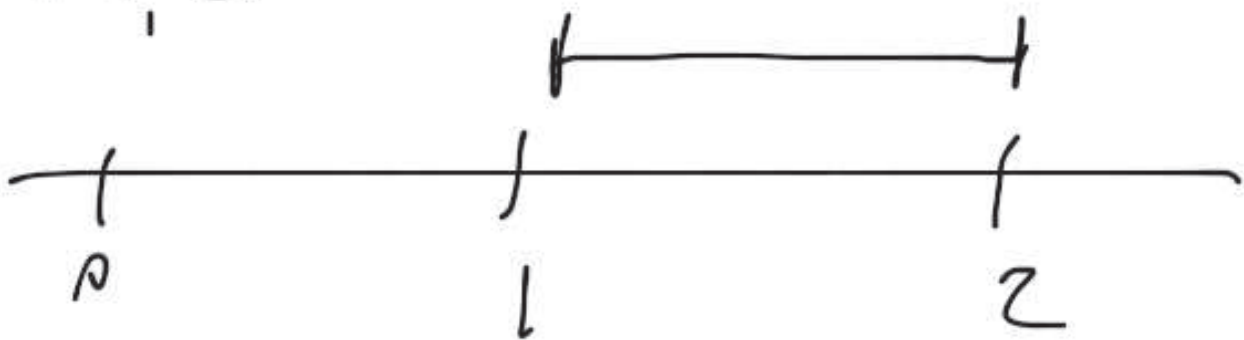
All'istante (0) è stato
 fissato il tasso di
 interesse da serie in
 vigore tra 1 anno
 per un periodo di
 durata (3) anni
 $4-1$

Relaxing the taxes:
spot & taxes forward


$$S_1 = 10\%$$

$$S_2 = 15\%$$

$$f_{1,2} = 17\%$$



Investo un capitale
 C per 2 anni;
ottingo:

$$C(1+S_2)^2$$


Investo C per un anno.
Dopo un anno ottingo

$$C(1+S_1)$$

investendolo poi e tenendo
ottingo

$$C(1+S_1)(1+f_{1,2})$$

21-5-13

$$(1+s_2)^2 \stackrel{?}{=} (1+s_1)(1+f_{1,2})$$

↑ ↑ ↑
15% 10% 17%

$$1.3225 > 1.287$$

Strategia di arbitraggio

Investo C euro al tasso

s_2 per 2 anni;

(operation e pronti.)

0

1

2

$$(A) -C$$

$$C(1+s_2)^2$$

$$(B) +C -C(1+s_1)$$

$$(C) +C(1+s_1) - \frac{C(1+s_1)}{(1+f_{11})}$$

0

0

$$C \left[(1+s_2)^2 - (1+s_1)(1+f_{12}) \right]$$

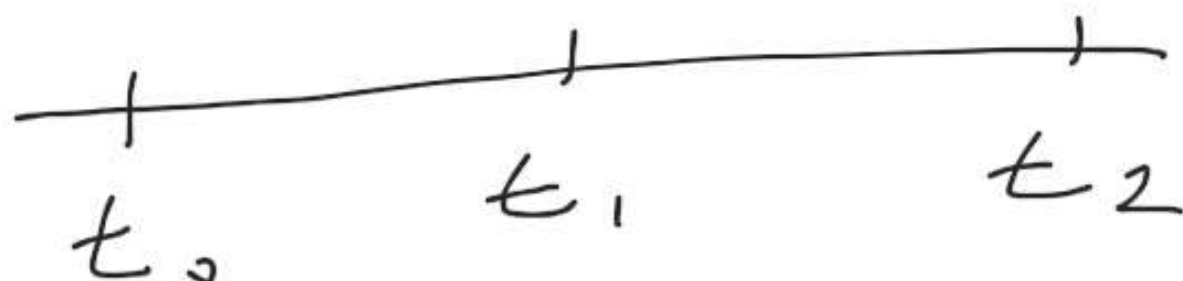
✓

0

(B) prende in prestito C
euro al tasso s_1 per
un anno
(oper. e prot.)

(C) prende a prestito
a termine tra 1 e
2 anni al tasso f_{12}
l'importo $C(1+s_1)$

In generale:



$$S(t_0, t_2)$$

$$S(t_0, t_1)$$

$$f(t_0, t_1, t_2)$$

$$\left[1 + S(t_0, t_2) \right]^{t_2 - t_0} =$$

$$\left[1 + S(t_0, t_1) \right]^{t_1 - t_0} \left[1 + f(t_0, t_1, t_1) \right]^{t_1 - t_1}$$

$$m(t_0, t_2) = m(t_0, t_1) m(t_1, t_2)$$

$$d(t_0, t_2) = d(t_0, t_1) d(t_1, t_2)$$

t_0	t_1	t_2
	0	1
(A) $-d(t_0, t_2)$	$\left. \begin{array}{l} -d(t_0, t_1, t_2) \\ +d(t_0, t_1, t_2) \end{array} \right\}$	0
(B) $+d(t_0, t_1, t_2)$		-1
(C) 0		
$d(t_0, t_1, t_2) d(t_0, t_1)$ $- d(t_0, t_2)$		0

(A) equivisto a prout:
 \perp z.c.b. che scale
in t_2

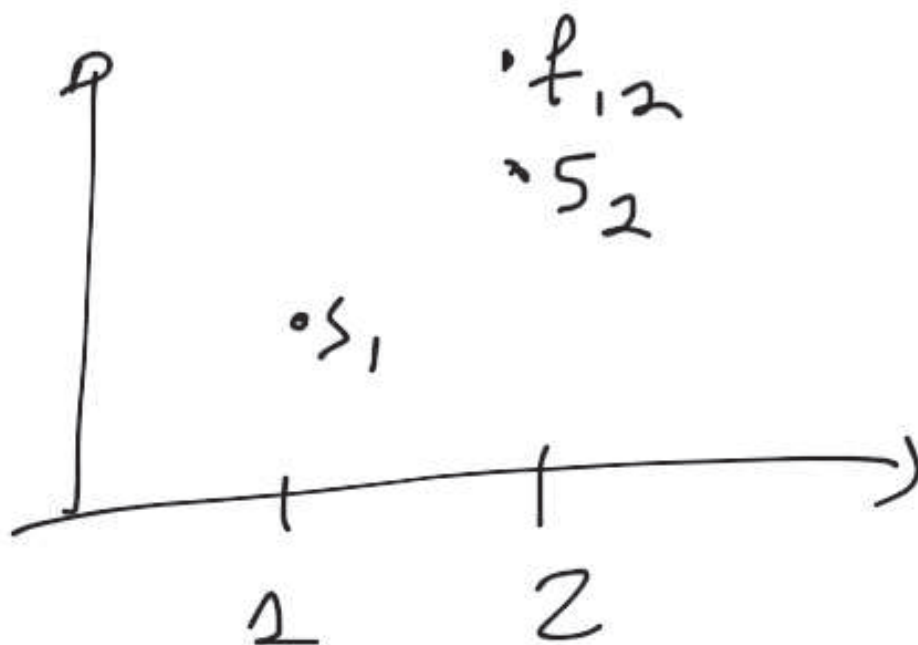
(B) vendo a prout:
 $d(t_0, t_1, t_2)$ z.c.b. che
scale in

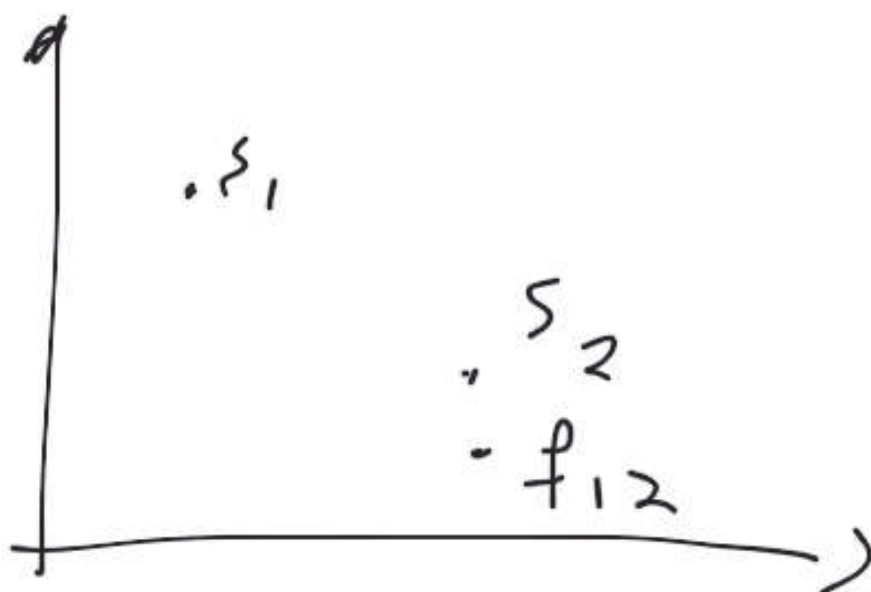
(C) vendo a termine un
pagamento in t_2 , \perp z.c.b.
che scale in t_2

$$(1+s_2)^2 = (1+s_1)(1+f_{1,2})$$

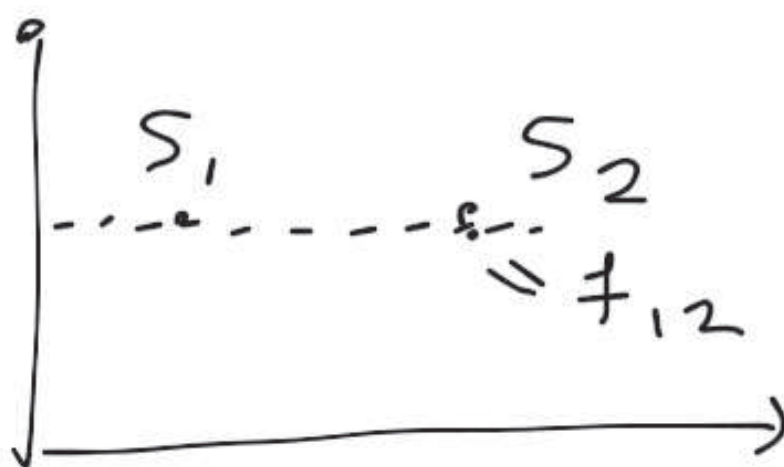
$$(1+f_{1,2}) = \frac{1+s_2}{1+s_1} \cdot 1+s_2$$

se $s_1 < s_2 \Rightarrow f_{1,2} > s_2$





quindi



Dato la struttura dei
fattori di sconto

$$d(0,1) = 0.98 \quad d(0,2) = 0.97$$

$$d(0,3) = 0.96 \quad d(0,4) = 0.955$$

Calcolare il V. attuale
del flusso

$$(10, 10) | (3, 4)$$

e il suo valore tra 1
anno se vale l'ipotesi
delle aspettative non
distorte sui tassi di interesse

$$VA = 10 \cdot d(0, 3) + 10 d(0, 4)$$

il val. futuro \bar{e} uguale
al prezzo a termine
in $t=1$ cioè

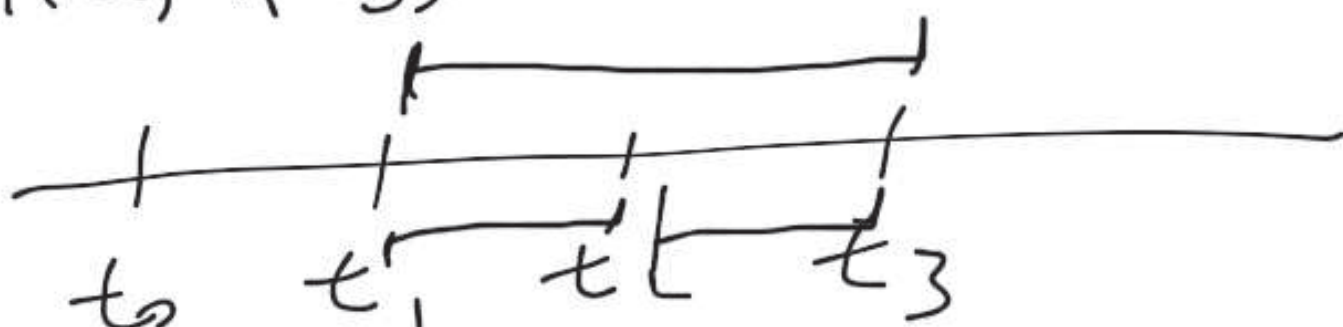
$$VF = 10 d(0, 1, 3) + 10 d(0, 1, 4)$$

$$d(0, 1, 3) = \frac{d(0, 3)}{d(0, 1)}$$

$$d(0, 1, 4) = \frac{d(0, 4)}{d(0, 1)}$$

Relazione generale tra
fattori di sconto e termine

$$d(t_0, t_1, t_3) = d(t_0, t_1, t_2) d(t_0, t_2, t_3)$$



$$I = \frac{d(t_0, t_3)}{d(t_0, t_1)}$$

$$II = \frac{\cancel{d(t_0, t_1)}}{d(t_0, t_1)} \frac{d(t_1, t_3)}{\cancel{d(t_1, t_2)}}$$

$$\underline{I} = \underline{II}$$

Dimostrare

$$d(0, t_1, t_n) = d(0, t_1, t_2) d(0, t_2, t_3) \\ \dots d(0, t_{n-1}, t_n)$$

ES. Det.: i tassi e
termini

$$f(0, 1, 2) = 3\%$$

$$f(0, 2, 3) = 4\%$$

$$f(0, 3, 4) = 3,5\%$$

calcolare il tasso

$$f(0, 1, 4)$$

$$d(0,1,4) = d(0,1,2) d(0,2,3) d(0,3,4)$$

$$= (1.03)^{-1} (1.04)^{-1} (1.035)^{-1}$$

$$d(0,1,4) = [1 + f(0,1,4)]^{-3}$$

$$f(0,1,4) = \left[(1.03 \cdot 1.04 \cdot 1.035)^{-1} \right]^{\frac{1}{3}} - 1$$

Copy: let: z z z z: one

continua

Cont. in a

$$d(t_0, t_1) = e$$

$$-\gamma(t_0, t_1, t_2) / (t_2 - t_1)$$

$$d(t_0, t_1, t_2) = e$$

$$d(t_0, t_1, t_2) = \frac{d(t_0, t_2)}{d(t_0, t_1)}$$

$$-\gamma(t_0, t_1, t_2)(t_2 - t_1) = -\gamma(t_0, t_2)(t_2 - t_0) + \gamma(t_0, t_1)(t_1 - t_0)$$

Es.

Calcolare il tasso
a termine tra 2 e
3 anni sapendo che
il tasso a pronti a
2 anni è 5% e quello
a pronti a 3 anni
è 6%. Considerando
1. Capitalizz. annuale
2. Cap. continua

22.5.13

Tasso di peritè.

E' il T.A.N. che fa sì
che vi obbligar. quot.
alle peri.

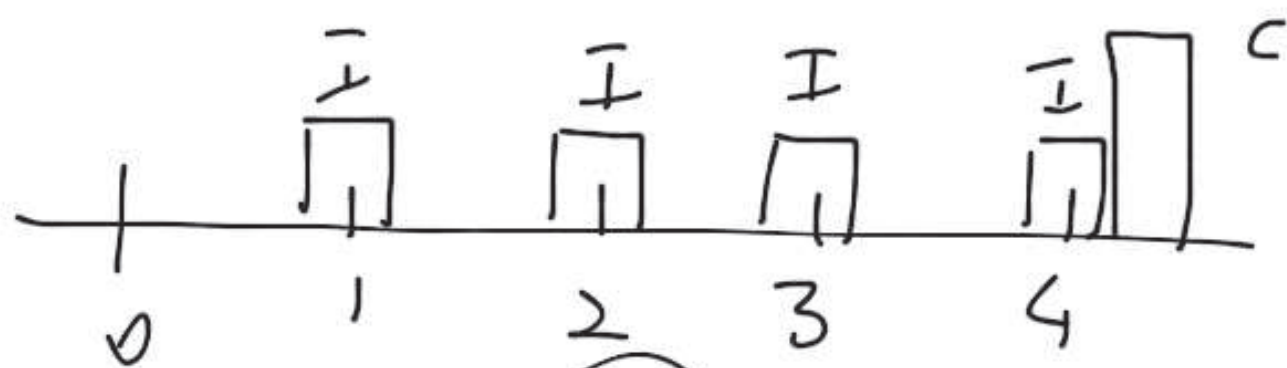
(per yield)

→

Dato la struttura a termine
dei fattori di sconto

$d(0, t_k)$ $k=1 \dots n$

calcolare il tasso di peritè



Calculate \bar{I} t.c.

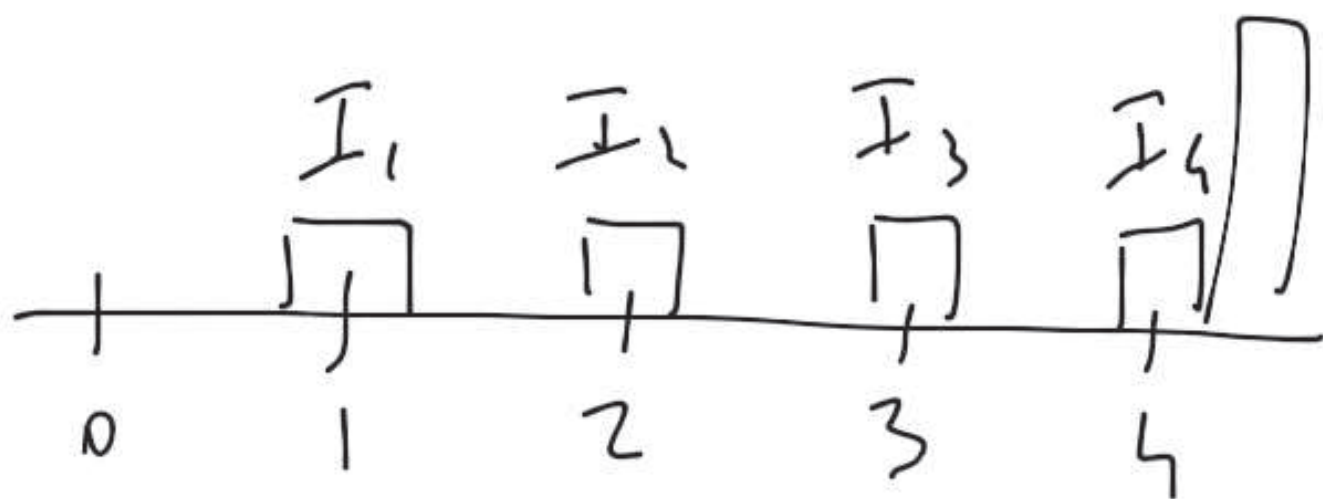
$$\bar{I} \cdot d(0,1) + \bar{I} d(0,2) + \dots$$

$$+ \bar{I} d(0,4) + C d(0,4) = C$$

$$\bar{I} = \frac{C(1 - d(0,4))}{\sum_{k=1}^4 d(0,k)}$$

$$\frac{\bar{I}}{C} = \frac{1 - d(0,4)}{\sum_{k=1}^4 d(0,k)}$$

Valore attuale di
un titolo a tasso
variabile
(es. CCT)



$$I_1 = C \cdot i(0,1)$$

$$I_2 = C \cdot i(1,2) \text{ nota in } t=1$$

Un TTV quota sempre
alle pari dopo ogni
stacco di adola.

Si dimostra attraverso
una strategia di
reinvestimento

