22.5.13

Tasso di parità.

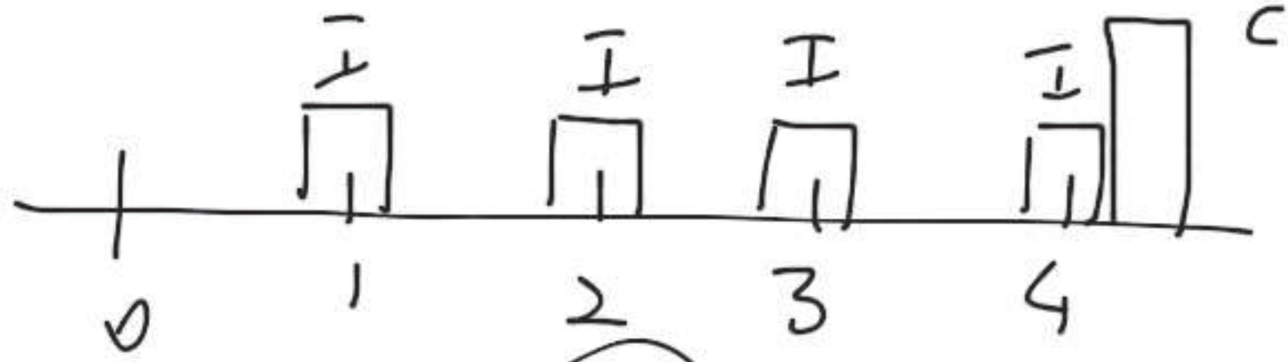
E' il T.A.N. che fa sì che vi obbligaz. quot. alla pari.

(par yield)

Data la struttura a termine dei fattori di sconto

$d(0,t_k)$ $k=1\dots n$

Calcolare il tasso di parità




Calcolare $\underline{I}$ t.c.

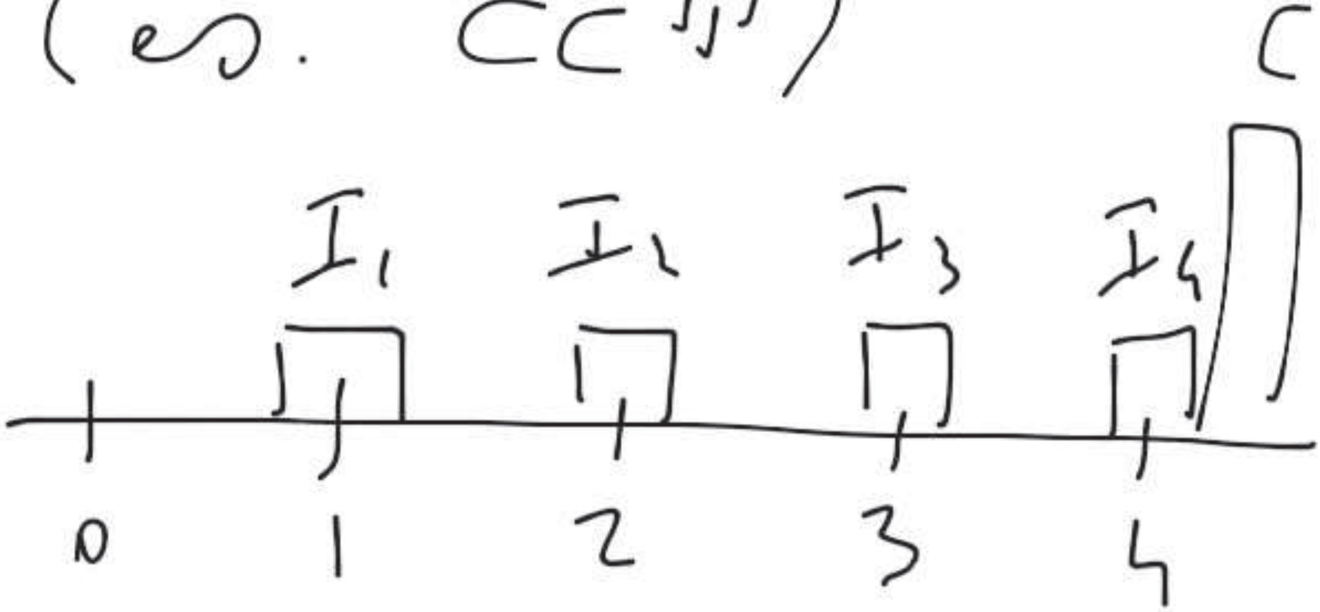
$$\underline{I} \cdot d(0,1) + \underline{I}\, d(0,2) + \dots$$

$$\dots + \underline{I}\, d(0,4) + C\, d(0,4) = C$$

$$\underline{I} = \frac{C\left(1 - d(0,4)\right)}{\sum_{k=1}^{4} d(0,k)}$$

$$\underline{I}/C = \frac{1 - d(0,4)}{\sum_{1}^{4} d(0,k)}$$

Valore attuale di un titolo a tasso variabile (es. $CC^{T}$)

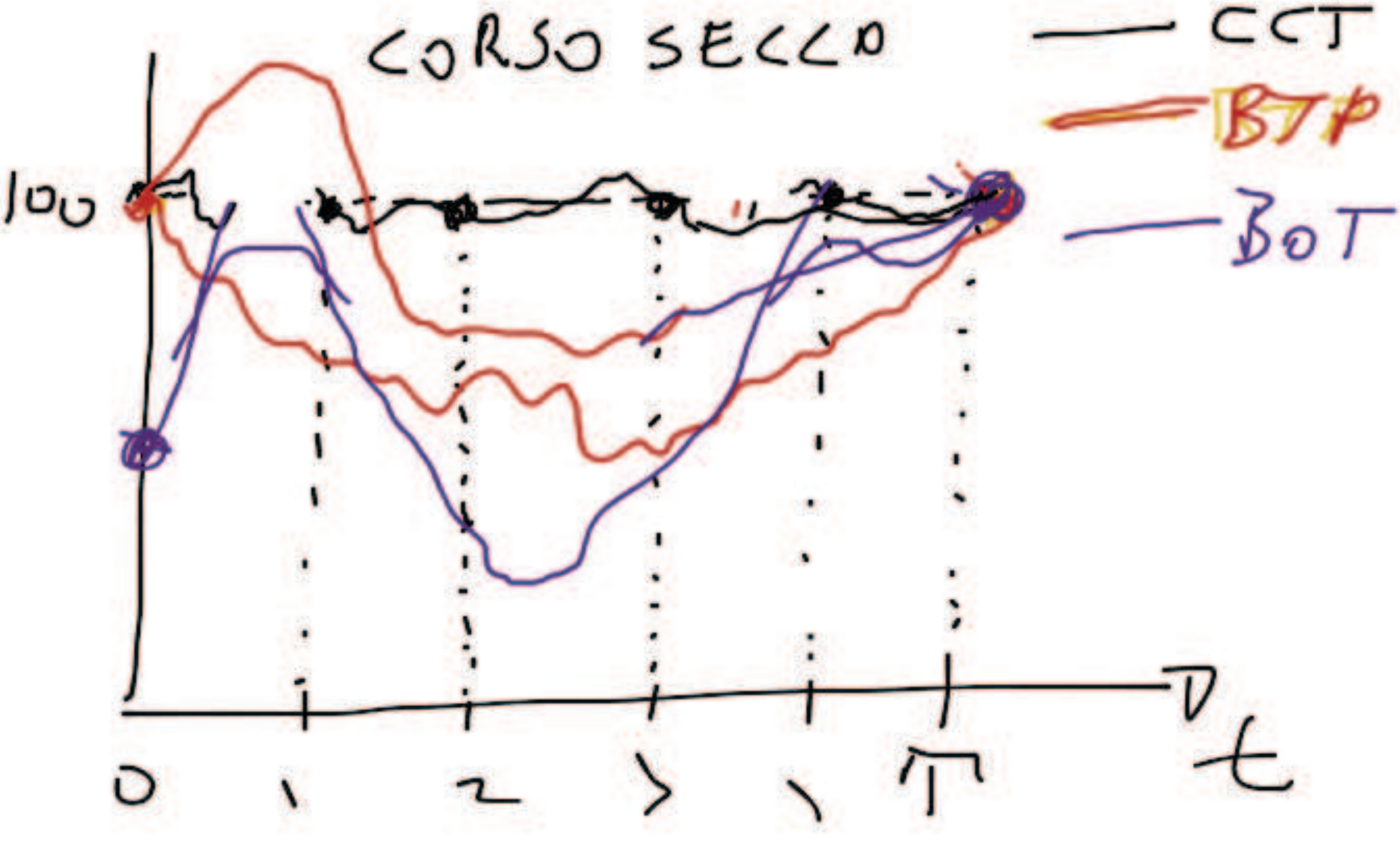



$I_1 = C \cdot i(0,1)$

$I_2 = C\, i(1,2) \leftarrow$ noto in $t=1$

Un TTV quota sempre alla pari dopo ogni stacco di cedola.

Si dimostra attraverso una strategia di reinvestimento



# 6. Teoria del portafoglio nell'approccio media-varianza

. Titoli a $\boxed{\text{rendimento}}$ aleatorio

$$R = \frac{V_1}{V_0}$$

valore in 1

valore in 0

rendimento ("total return")

$$\frac{V_1 - V_0}{V_0} = R - 1 = r$$

tasso di rendimento.

Rendimento di un portafoglio di titoli:

Dato un importo $X_0$ investito una percentuale $w_i$ nel titolo $i$ $i=1,\dots,n$

Es. $X_0 = 10'000$ €

$w_1 = 20\%$ nel tit. 1

$w_2 = 30\%$ nel tit. 2

$w_3 = 50\%$ nel tit. 3

$V_0 = \cancel{X}_0$ + vel. in 0

valore in 1

$$\frac{V_1}{X_0} = w_2 \cancel{X_0} \cdot R^1 + w_2 \cancel{X_0} R^2 + w_3 \cancel{X_0} R^3$$

$$R^{\pi} = \frac{V_1}{V_0} = w_1 R^1 + w_2 R^2 + w_3 R^3$$

$$R^{\pi} = \sum_{k=1}^{n} w_k R^k$$

$R^{\pi} - 1$

$$r_\pi = R_\pi - 1 =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} w_k R^k - \sum_{k=1}^{n} w_k$$

$$= \sum_{k=1}^{n} w_k (R^k - 1)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} w_k r_k$$

Es. $r_1 = 10\%$ $r_2 = -5\%$

$r_3 = 0\%$

$r_\pi = ?$ $R_\pi = ?$ $V_1 = ?$

Calcolo del rendimento atteso di un ptf.

$$Er = E\sum_{k=1}^{n} w_k r_k$$

$$= \sum_{k=1}^{n} w_k E r_k$$

Varianza

$$Var(r) = E(r - Er)^2 =$$

$$E\left(r^2 - 2rEr + (Er)^2\right) =$$

$$Er^2 - 2(Er)^2 + (Er)^2 =$$

$$= Er^2 - (Er)^2$$

$$Cov(r_1, r_2) =$$

$$E(r_1 - Er_1)(r_2 - Er_2) =$$

$$= E r_1 r_2 - Er_1 Er_2$$

cov. $r_i r_j$

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & & \boxed{\sigma_{ji}} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & & \\ & \boxed{\sigma_{ij}} & \ddots & \\ & & & \sigma_{nn} \end{pmatrix} \; n$$

$$m$$

$$\sigma_{11} = var(r_1)$$

$$\sigma_{12} = cov(r_1, r_2) = cov(r_2, r_1)$$

$$r = w_1 r_1 + w_2 r_2$$

$$\mathrm{var}(r) =$$

$$\begin{pmatrix} w_1 & w_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} =$$

$$1 \times 2 \qquad 2 \times 2 \qquad 2 \times 1$$

$$\begin{pmatrix} w_1 & w_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{11} w_1 + \sigma_{12} w_2 \\ \sigma_{21} w_1 + \sigma_{22} w_2 \end{pmatrix} =$$

$$= \sigma_{11} w_1^2 + 2 \sigma_{12} w_1 w_2 +$$
$$+ \sigma_{22} w_2^2$$

Es. un ptf. è composto da 3 titoli con quote risp. $(-10\%, +60\%, +50\%)$

Le varianze dei tre titoli sono

$\sigma_{11} = (0.2)^2$, $\sigma_{22} = (0.3)^2$, $\sigma_{33} = (0.7)^2$

Il coeff. di correlazione tra 1 e 2 è $\rho_{12} = 0.3$

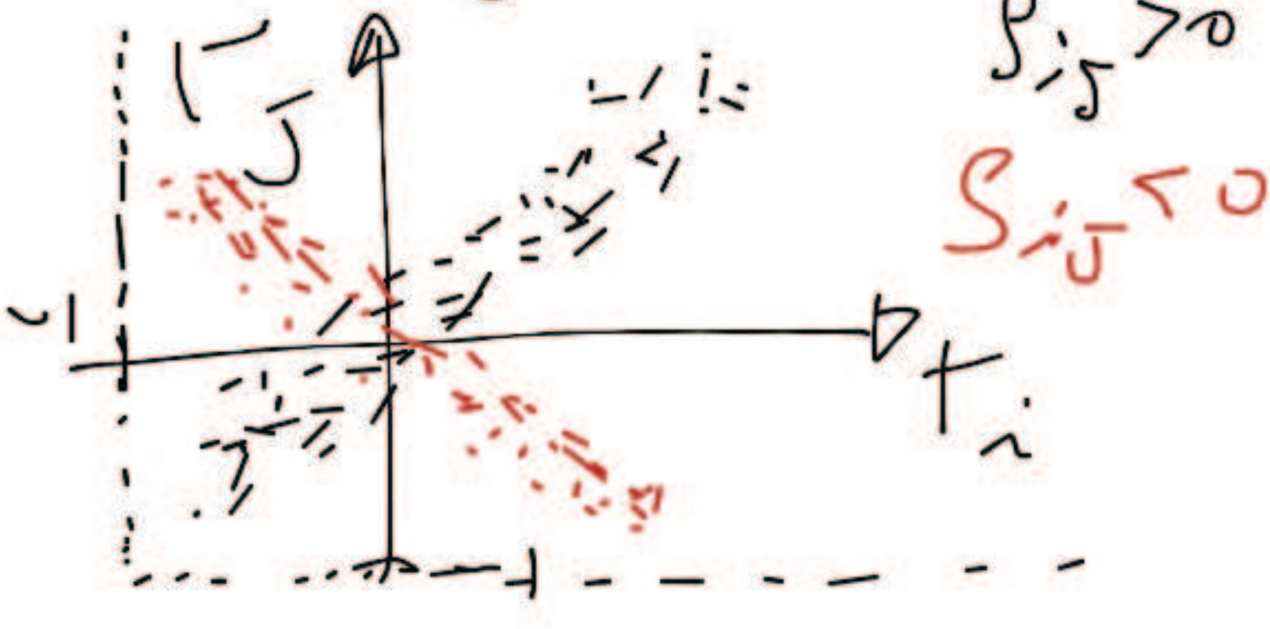
tra 2 e 3 è $\rho_{23} = -0.5$

tra 1 e 3 è $\rho_{13} =$

Def.

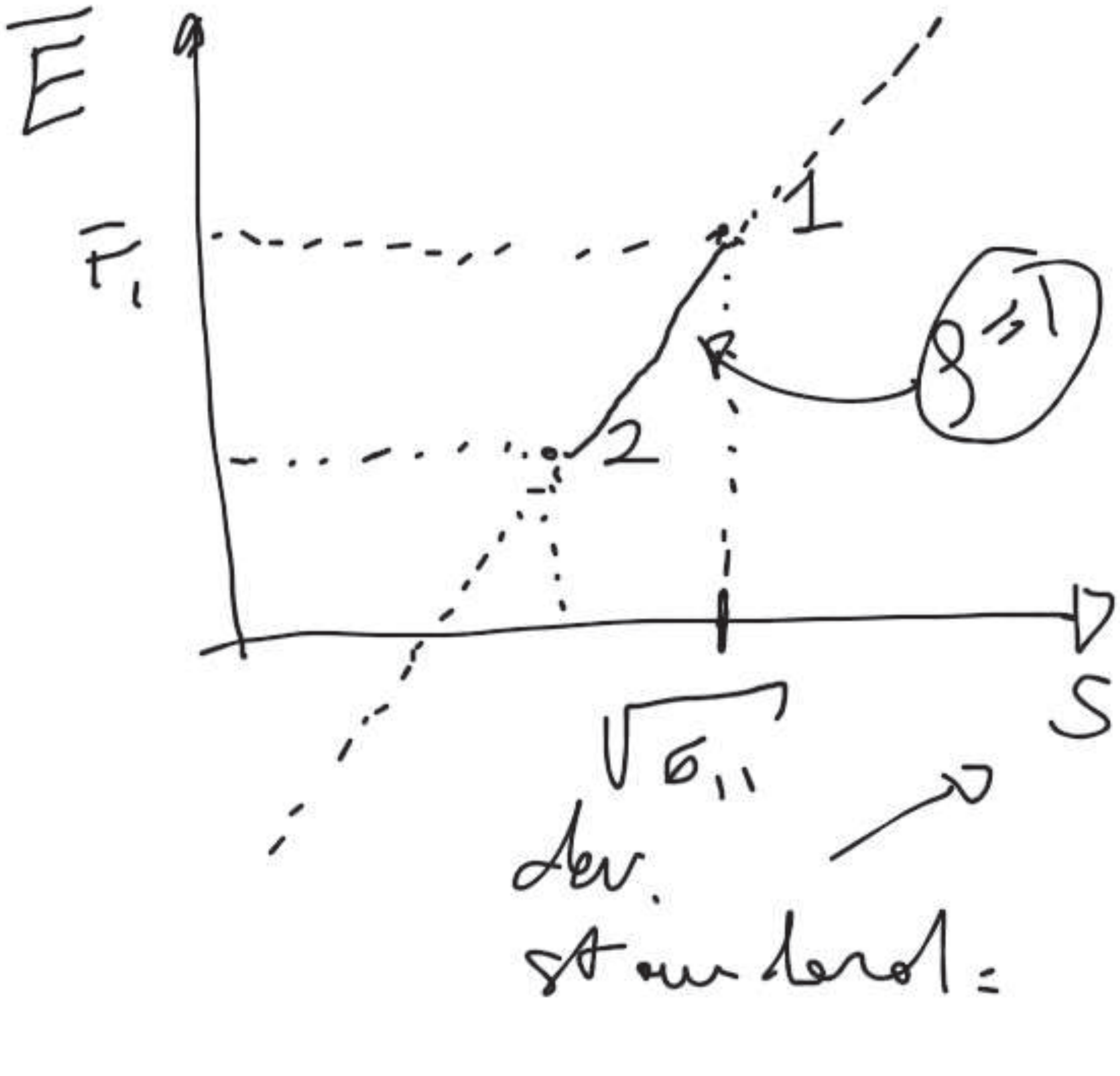
$$\sigma_{ij} = \rho_{ij} \sqrt{\sigma_{ii}} \sqrt{\sigma_{jj}}$$

$$-1 \leq \rho_{ij} \leq 1$$



Rappresentazione delle opportunità di investimento

Piano Media - Dev. Standard



$$r_\pi = \omega_1 r_1 + \omega_2 r_2$$

$$\omega_1 + \omega_2 = 1$$

$$w_1 = \alpha$$

$$w_2 = 1 - \alpha$$

$$E r_\pi = \alpha \bar{r}_1 + (1-\alpha) \bar{r}_2$$

$$\text{Var } r_\pi = \alpha^2 \sigma_{11} + 2\alpha(1-\alpha)\sigma_{12} +$$

$$+ (1-\alpha)^2 \sigma_{22}$$

$$= \alpha^2 \sigma_{11} + 2\alpha(1-\alpha)\rho\sqrt{\sigma_{11}\sigma_{22}} +$$

$$+ (1-\alpha)^2 \sigma_2$$

Se $\rho = 1$

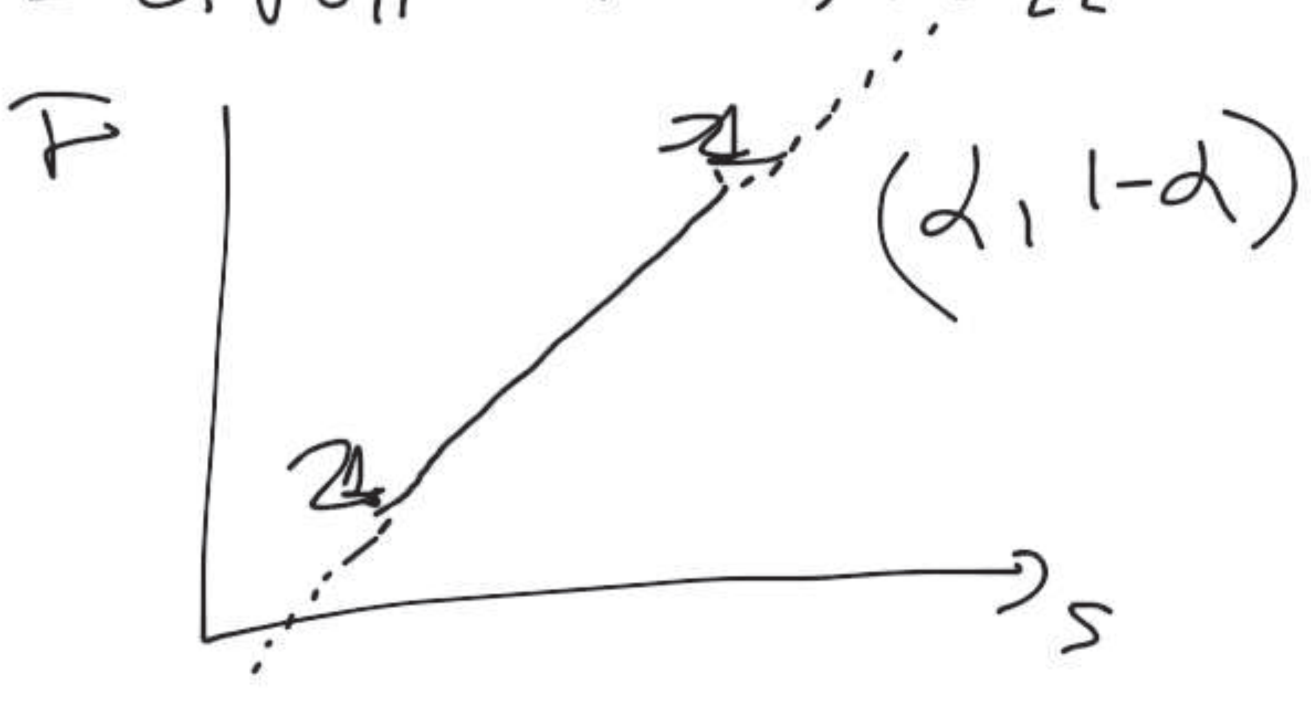
$$\text{Var}\, r = \left(\alpha\sqrt{\sigma_{11}} + (1-\alpha)\sqrt{\sigma_{22}}\right)^2$$

28. 5. 2013

Se $\rho = 1$

$$\sigma = \sqrt{\text{Var}\, r}$$

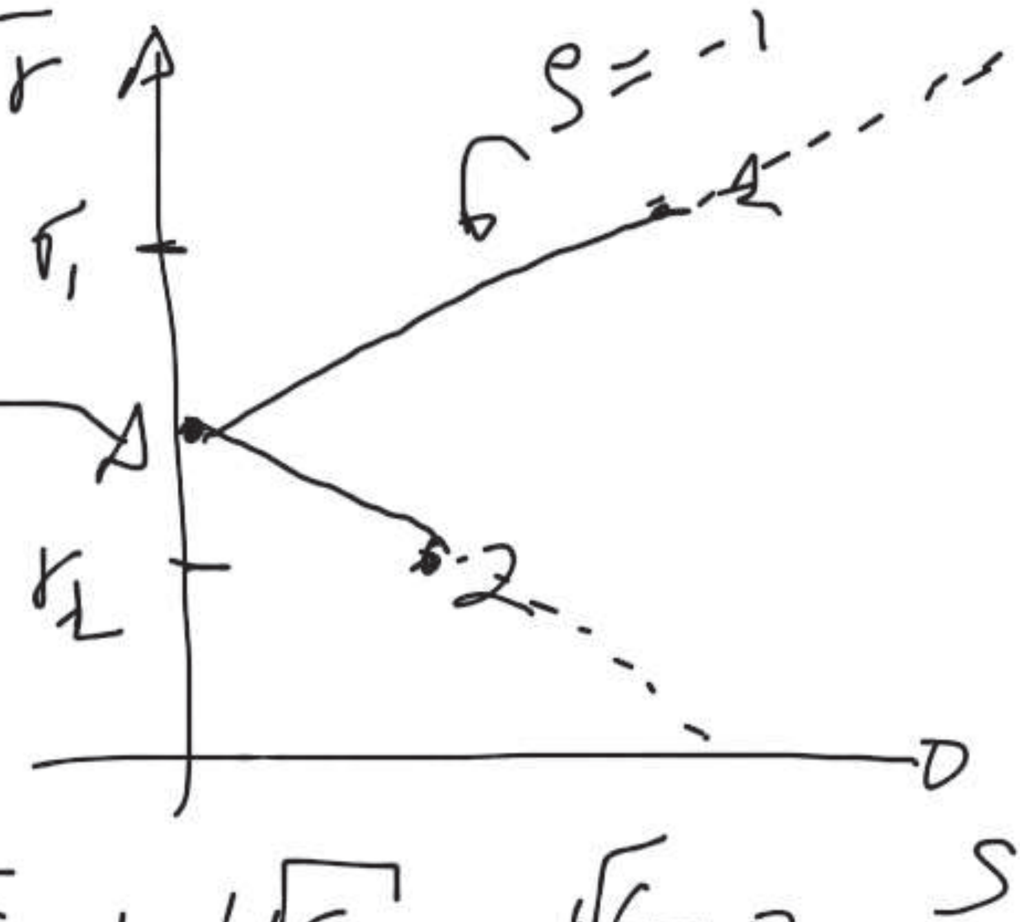
$$= \alpha\sqrt{\sigma_{11}} + (1-\alpha)\sqrt{\sigma_{22}}$$



Se $\rho = -1$

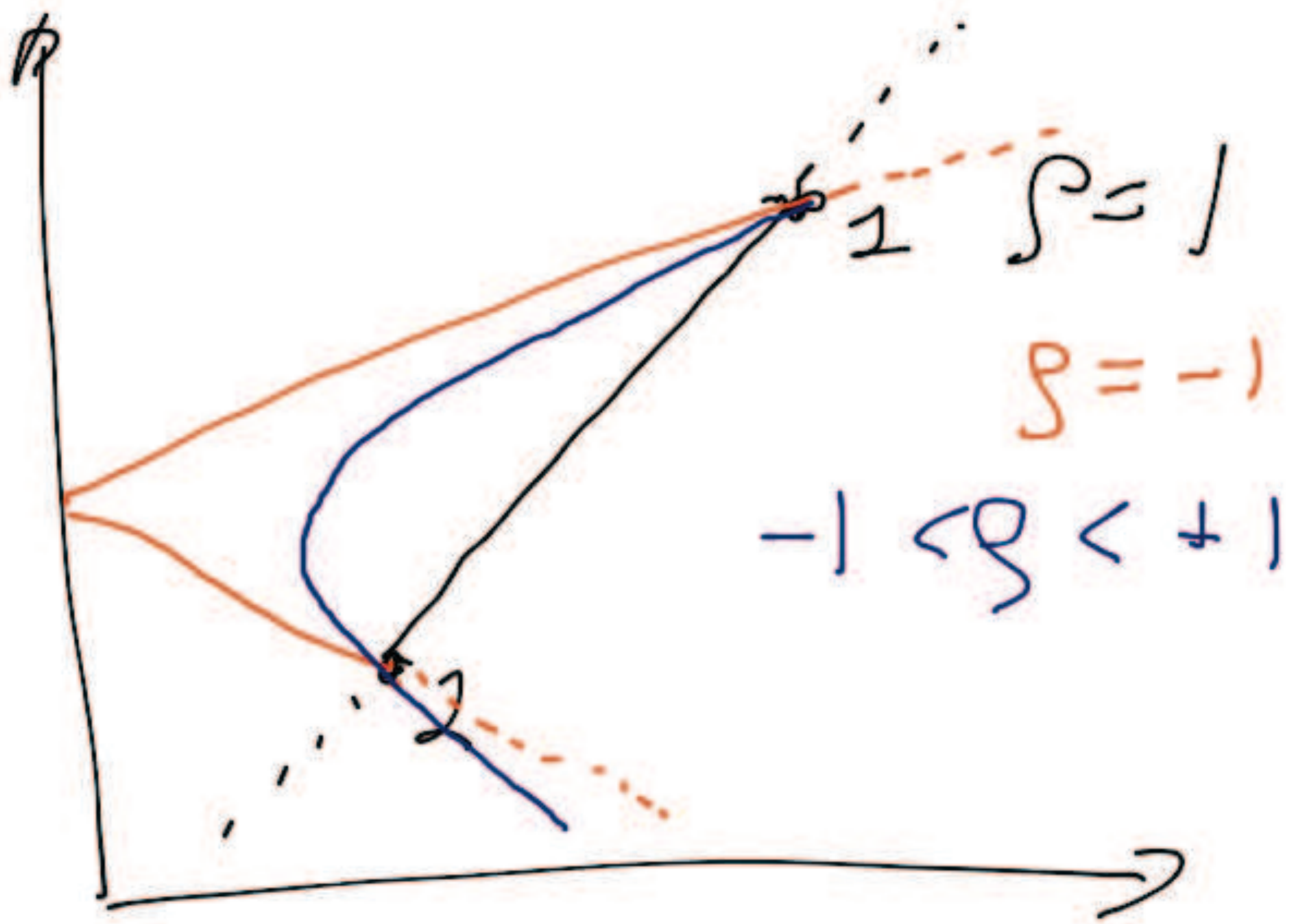
$$\operatorname{Var} r = \left(\alpha\sqrt{\sigma_{11}} - (1-\alpha)\sqrt{\sigma_{22}}\right)^2$$

$$\sigma = \sqrt{\operatorname{Var} r} = \left|\alpha\sqrt{\sigma_{11}} - (1-\alpha)\sqrt{\sigma_{22}}\right|$$




$$\alpha\sqrt{\sigma_{11}} + \alpha\sqrt{\sigma_{22}} - \sqrt{\sigma_{22}} = 0$$

$$\bar{\alpha} = \frac{\sqrt{\sigma_{22}}}{\sqrt{\sigma_{11}} + \sqrt{\sigma_{22}}}$$



1
2
ρ = 1
ρ = −1
−1 < ρ < +1

Calcoliamo il ptf. a varianza minima <u>nel caso di due titoli</u>

$$\sigma^2(\alpha) = \alpha^2 \sigma_{11} + \underset{2(\alpha-\alpha^2)}{2\alpha(1-\alpha)}\,\sigma_{12} + (1-\alpha)^2 \sigma_{22}$$

$$\frac{d}{d\alpha}\sigma^2(\alpha) = \cancel{2}\alpha\sigma_{11} + \cancel{2}(1-2\alpha)\sigma_{12} - \cancel{2}(1-\alpha)\sigma_{22}$$

$$= 0$$

$$\alpha(\sigma_{11} - 2\sigma_{12} + \sigma_{22}) = \sigma_{22} - \sigma_{12}$$

$$\alpha^* = \frac{\sigma_{22} - \sigma_{12}}{\sigma_{11} - 2\sigma_{12} + \sigma_{22}}$$

Caso di $n$ titoli

## Diversificazione

- Caso estremo.

$n$ titoli incorrelati:

- Portafoglio

$$w = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}\right)$$

"equally weighted"

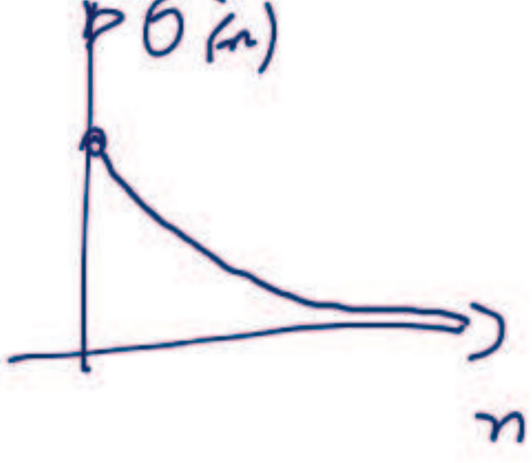
$$w' \Sigma w$$

$$\left(\tfrac{1}{n}, \tfrac{1}{n}, \ldots \tfrac{1}{n}\right) \begin{pmatrix} \sigma^2 & & & 0 \\ & \sigma^2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \sigma^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/n \\ \vdots \\ 1/n \end{pmatrix}$$

$$\left(\frac{\sigma^2}{n}, \frac{\sigma^2}{n}, \frac{\sigma^2}{n}, \ldots \frac{\sigma^2}{n}\right) \begin{pmatrix} 1/n \\ \vdots \\ 1/n \end{pmatrix} =$$

$$\frac{\sigma^2}{n^2} + \frac{\sigma^2}{n^2} + \cdots + \frac{\sigma^2}{n^2} =$$

$$n \cdot \frac{\sigma^2}{n^2} = \frac{\sigma^2}{n}$$



Correlazione costante
tra tutti i titoli.

$$\left(\tfrac{1}{n}, \tfrac{1}{n}, \dots, \tfrac{1}{n}\right) \begin{pmatrix} \sigma^2 & & 0.3\sigma^2 \\ 0.3\sigma^2 & \ddots & \\ 0.3\sigma^2 & \ddots & \\ \vdots & \cdots & \sigma^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/n \\ \vdots \\ \vdots \\ 1/n \end{pmatrix}$$

primo elemento:

$$\frac{\sigma^2}{n} + \underbrace{\frac{0.3\sigma^2}{n} + \frac{0.3\sigma^2}{n} + \dots + \frac{0.3\sigma^2}{n}}_{n-1}$$

$$= \frac{\sigma^2}{n} + (n-1) \cdot \frac{0.3\sigma^2}{n} =$$

$$= \frac{\sigma^2}{n} + 0,3\sigma^2 - \frac{0,3\sigma^2}{n} =$$

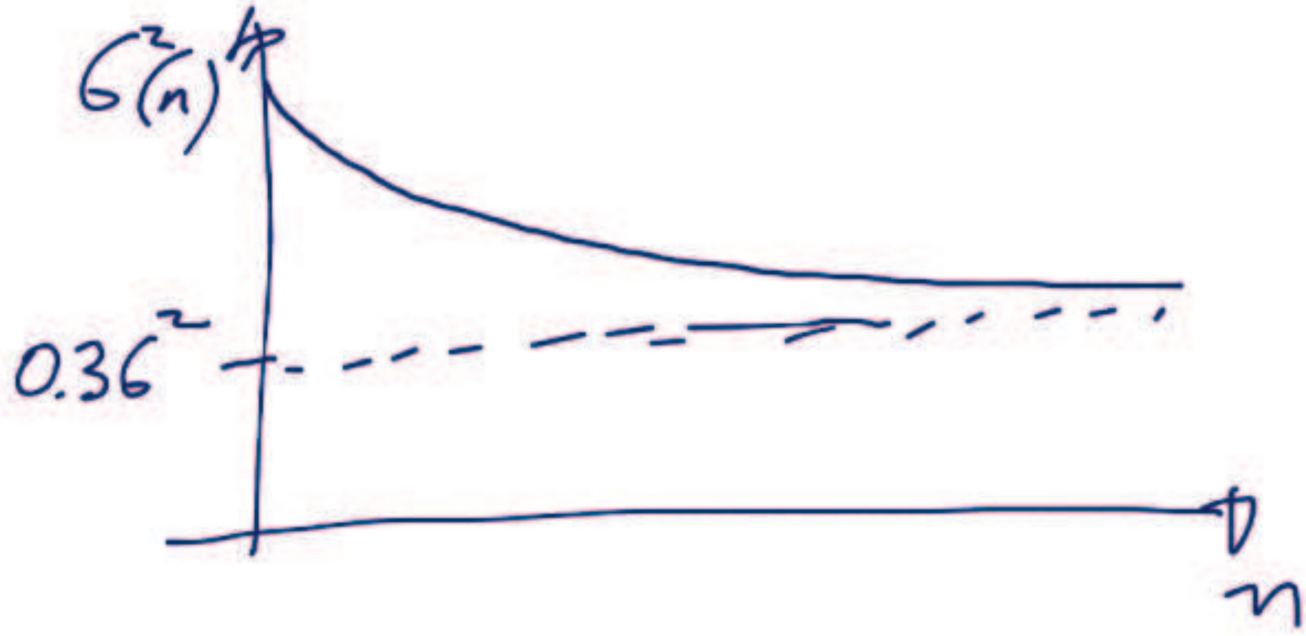
$$= 0,3\sigma^2 + 0.7\,\sigma^2/n = c$$

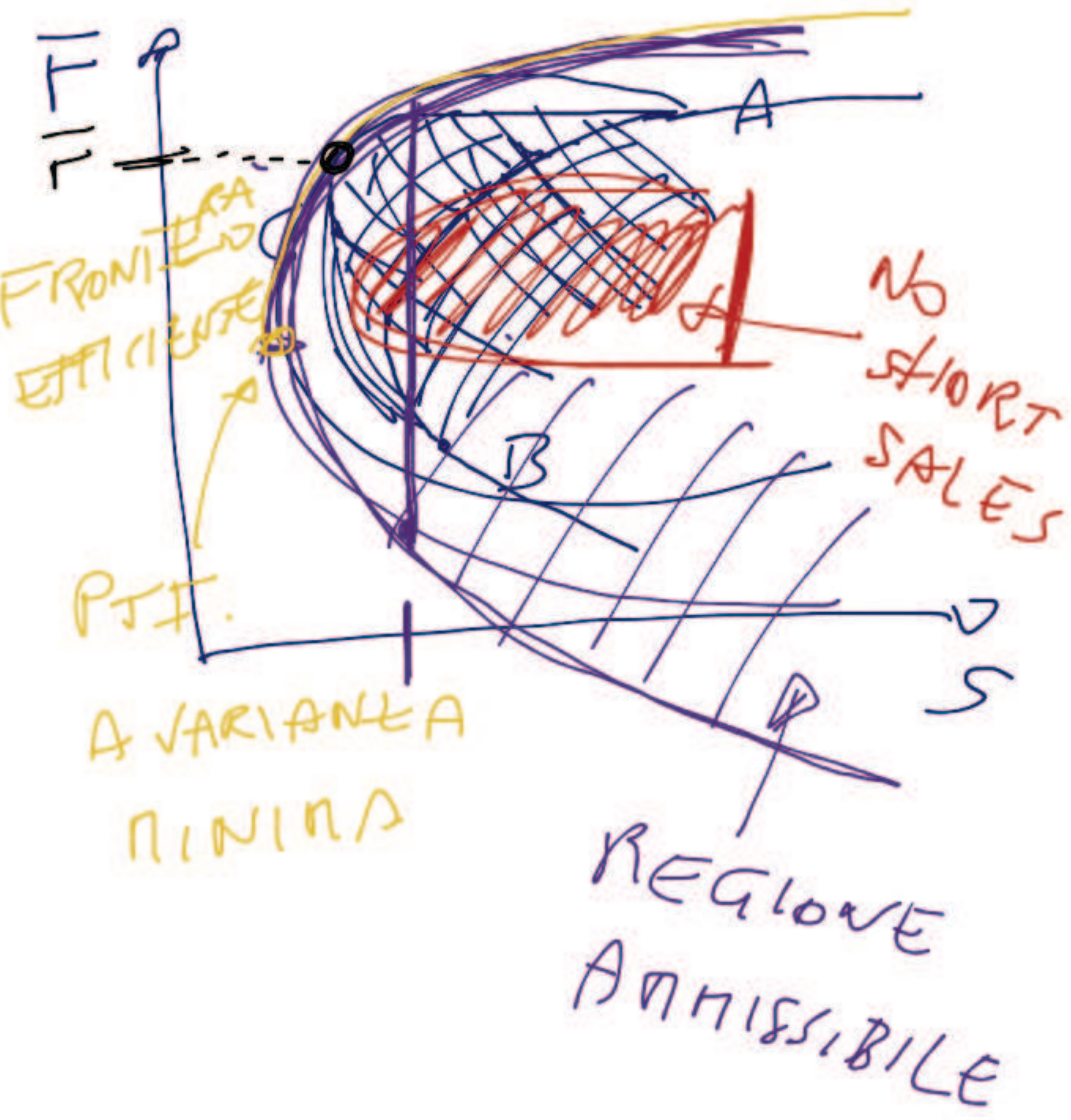
$$(c, c, \dots, c) \begin{pmatrix} 1/n \\ \vdots \\ 1/n \end{pmatrix}$$

$$= \underbrace{c/n + c/n + \dots + c/n}_{n}$$

$$= n \cdot c/n = c$$

$$C = 0.3\sigma^2 + 0.7 \frac{\sigma^2}{n}$$





F
r
FRONTIERA EFFICIENTE
PJI.
A VARIANZA MINIMA
A
B
NO SHORT SALES
S
REGIONE AMMISSIBILE

$$\min_{w} \; w^T \Sigma w$$

$$w_1 + w_2 + \dots + w_n = 1$$

$$w_1 \bar{r}_1 + w_2 \bar{r}_2 + \dots + w_n \bar{r}_n = \bar{r}$$

$$w_1 \geq 0, \; w_2 \geq 0, \; \dots, \; w_n \geq 0$$

Se voglio imporre no short sales

$$(w_1, w_2, \dots w_n)\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} =$$

$$w_1 + w_2 + \dots + w_n =$$

$$\underline{w}^T \vec{\underline{1}} = 1$$

$$(w_1 \dots w_n)\begin{pmatrix}\bar{r}_1\\ \vdots \\ \bar{r}_n\end{pmatrix} =$$

$$w_1 \bar{r}_1 + \dots + w_n \bar{r}_n$$

$$\min_{\omega} \frac{1}{2} \omega^T \Sigma \omega$$

$$\lambda \to \omega^T \vec{r} = \bar{r}$$

$$\mu \to \omega^T \vec{1} = 1$$

$$\mathcal{L}(\omega, \lambda, \mu) =$$

$$\frac{1}{2} \omega^T \Sigma \omega - \lambda (\omega^T \vec{r} - \bar{r}) - \mu (\omega^T \vec{1} - 1)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \omega} = \sum \omega - \lambda \vec{r} - \mu \vec{1}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = \omega^T \vec{r} - \bar{r}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mu} = \omega^T \vec{1} - 1$$

29 - 5 - 2013

Lezione svolta alla lavagna.

Riporto le note dell'anno precedente

# Il problema di Markowitz

$$\min_{\underline{w}} \frac{1}{2} \underline{w}^T \Sigma \, \underline{w}$$

$\lambda \longrightarrow w_1 \bar{r}_1 + w_2 \bar{r}_2 + \dots + w_n \bar{r}_n = \bar{r}$

$\mu \longrightarrow w_1 + w_2 + \dots + w_n = 1$

con $\rightarrow (w_1 \dots w_n \geq 0)$

senza short-sale

$\Sigma$ è matrice varianza covarianza

$$\underline{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}$$

Per risolvere il problema senza vincoli di short-selling si scrive la funzione Lagrangiana

$$\mathcal{L}(\underline{w}, \lambda, \mu) = \frac{1}{2}\underline{w}^T \Sigma \underline{w} - \lambda\left[\sum_{i=1}^{n} w_i \bar{r}_i - \bar{r}\right] - \mu\left[\sum_{i=1}^{n} w_i - 1\right]$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \underline{w}} = \cancel{2}\frac{1}{\cancel{2}}\Sigma \underline{w} - \lambda \vec{\bar{r}} - \mu \vec{1} = \vec{0}$$

$$\vec{\bar{r}} = \begin{pmatrix} \bar{r}_1 \\ \vdots \\ \bar{r}_n \end{pmatrix} \qquad \vec{1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \Sigma \underline{\omega} - \lambda \vec{r} - \mu \vec{1} = \vec{0} \\ \sum \omega_i = 1 \\ \sum \omega_i \bar{r}_i = \bar{r} \end{cases}$$

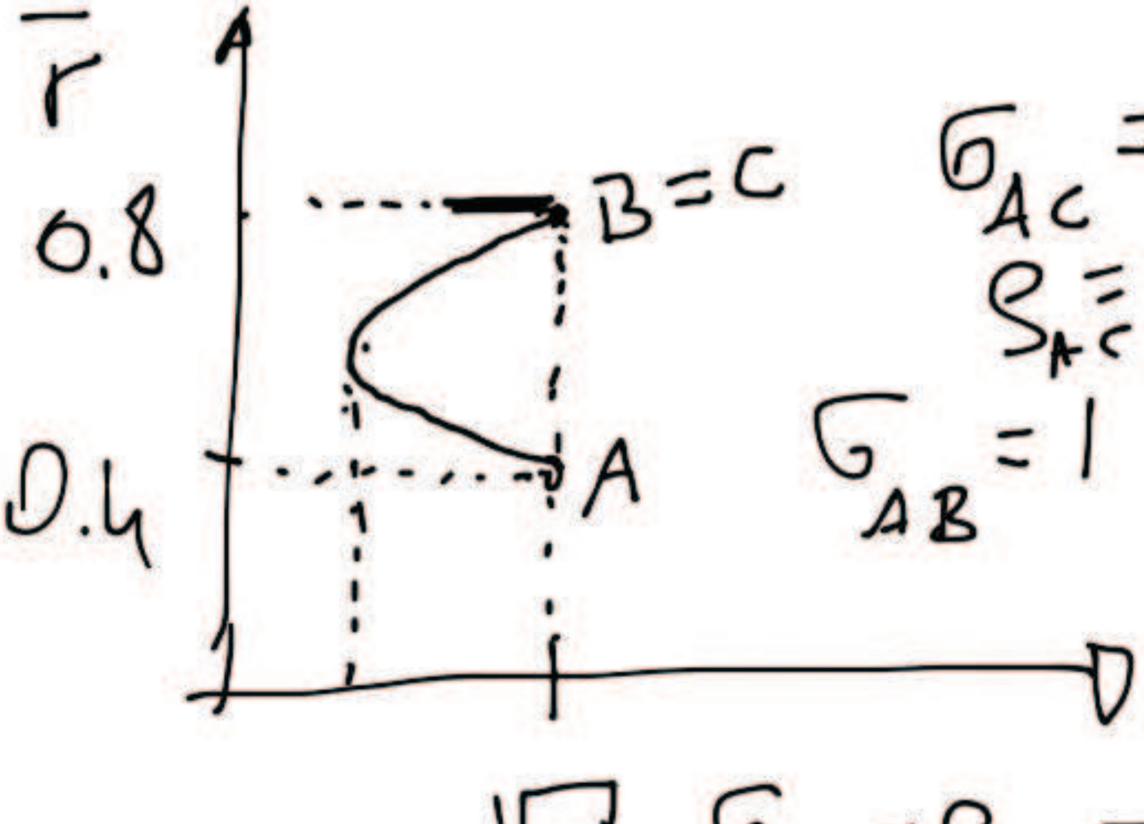
sistema lineare

$(n+2) \times (n+2)$

Es. 3 (Raccolta di esercizi on-line)

3 titoli

$$\bar{r} = \begin{pmatrix} 0.4 \\ 0.8 \\ 0.8 \end{pmatrix} \qquad \Sigma = \begin{pmatrix} 2 & 1 & \boxed{0} \\ 1 & 2 & 1 \\ \boxed{0} & 1 & 2 \end{pmatrix}$$




$\sigma_{AC} = 0$

$\rho_{AC} = 0$

$\sigma_{AB} = 1$

$\sigma_{AB} = \rho_{AB} \cdot \sigma_A \sigma_B$

$$\rho_{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = 1/2$$

c) Il portafoglio
$(1/2, 0, 1/2)$
è efficiente in M-V?

L'equazione
$$\Sigma \underline{w} - \lambda \vec{r} - \mu \vec{1} = \vec{0}$$
è risolvibile (e quindi il portafoglio è efficiente) se e solo se i vettori

$\Sigma \underline{w}$, $\vec{r}$, $\vec{1}$ sono lin. dipendenti

Calcoliamo il rango della matrice

$$\left( \Sigma\omega \mid \vec{r} \mid \vec{1} \right)$$

(Ipotesi: $\vec{r}$ indip. da $\vec{1}$)

Se il rango è 3

$\Rightarrow$ i vettori sono indip.

quindi il portafoglio

non è efficiente.

Se il rango è < 3

il ptf. è eff.

$$\Sigma w = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1/2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0.4 & 1 \\ 1 & 0.8 & 1 \\ 1 & 0.8 & 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$rg < 3$$

$\Rightarrow$ Il ptf. è efficiente.

Considerare il portafoglio $w_2 = (1/3, 1/6, 1/2)$ tracciare il punto corrispondente nel grafico.

$$\bar{r} = \frac{1}{3} \cdot 0.4 + \frac{1}{6} \cdot 0.8 + \frac{1}{2} 0.8$$

$$\sigma^2 = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/6 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/6 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \underline{\omega}$$

$$\sigma^2 = \left(\frac{1}{6}\right)^2 \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$= \left(\frac{1}{6}\right)^2 \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4+1+0 \\ 2+2+3 \\ 0+1+6 \end{pmatrix}$$

$$= \left(\frac{1}{6}\right)^2 \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$= \left(\frac{1}{6}\right)^2 (10 + 7 + 21)$$

$$= \left(\frac{1}{6}\right)^2 38 \implies \sigma = \frac{1}{6}\sqrt{38}$$

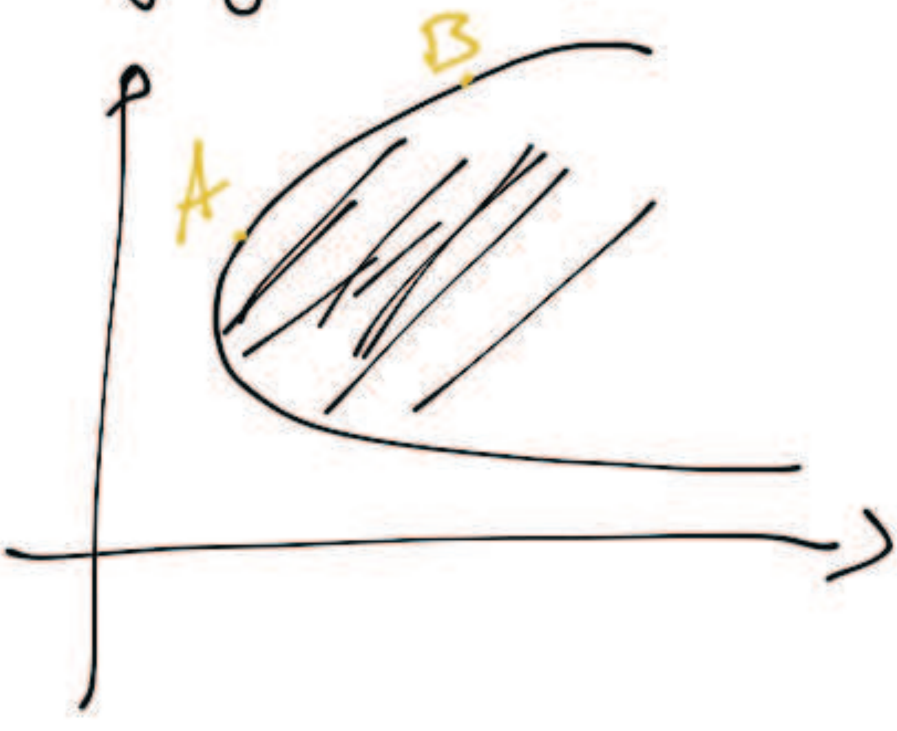
$w_2$ e $w_3$ sono efficienti. Controllare.

$$w = \left(\tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{3}\right)$$

è efficiente?

Teorema dei 2 fondi:

La frontiera efficiente si ottiene dalla combinazione di due qualsiasi portafogli efficienti:



Nell' esempio precedente sappiamo che i portaf.

$w_1 = \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)$ e

$w_2 = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{2}\right)$ sono

efficienti. Quindi

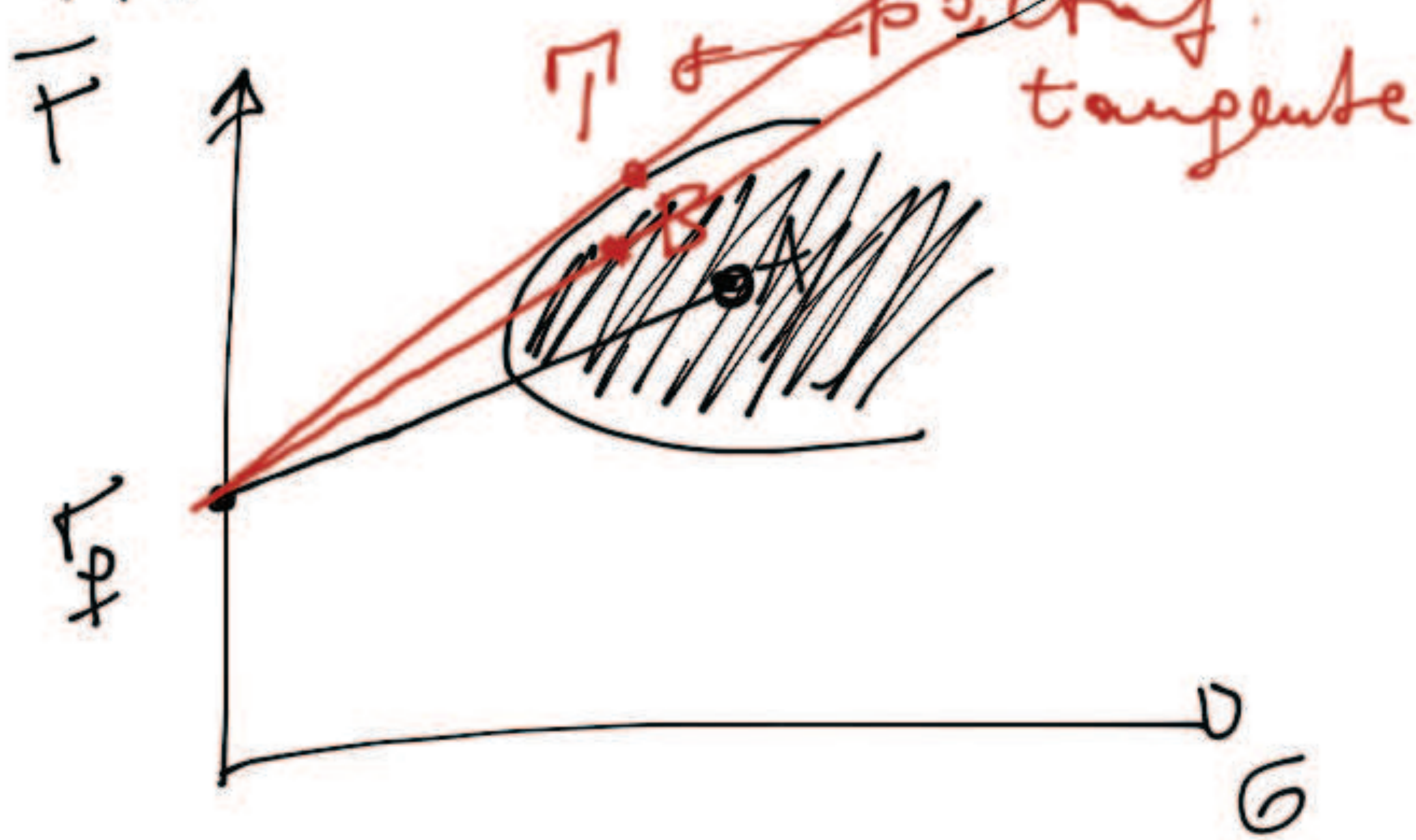
il portafoglio

$\underline{w}_\alpha = \alpha w_1 + (1-\alpha) w_2$

è efficiente

$$\underline{w}_\alpha = \begin{pmatrix} \frac{\alpha}{2} + (1-\alpha)\frac{1}{3} \\ (1-\alpha)\frac{1}{6} \\ \alpha \cdot \frac{1}{2} + (1-\alpha)\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Titolo non rischioso




Il titolo non rischioso ha varianza $\sigma_f^2 = 0$.
Un ptf. composto del titolo non rischioso e da un titolo rischioso con varianza $\sigma_A^2$ e r.a. $\bar r_A$

$$\bar{r}(\alpha) = \alpha r_f + (1-\alpha)\bar{r}_A$$

$$\sigma^2(\alpha) = \cancel{\alpha^2 \sigma_f^2} + \cancel{2\alpha(1-\alpha)\sigma_{Af}} + (1-\alpha)^2 \sigma_A^2$$

$$\sigma_f^2 = 0 \qquad \sigma_{Af} = 0$$

$$\sigma(\alpha) = (1-\alpha)\sigma_A$$