

L'interesse può essere capitalizzato con qualsiasi frequenza, non solo annualmente. È possibile anche la capitalizzazione continua, che determina una crescita esponenziale nel tempo del saldo bancario. Quando l'interesse è capitalizzato con frequenza maggiore di quella annuale, è utile definire sia un tasso di interesse nominale, sia un tasso di interesse annuo effettivo. Il tasso nominale è quello utilizzato per un singolo periodo diviso per la durata (in anni) del periodo stesso. Il tasso effettivo è quello che, applicato senza capitalizzazione, determinerebbe in un anno lo stesso incremento del saldo. Il tasso effettivo è maggiore di quello nominale; ad esempio, con capitalizzazione trimestrale un tasso di interesse annuo nominale dell'8% corrisponde a un tasso annuo effettivo dell'8.24%.

Una somma di denaro ricevuta in futuro vale meno della stessa somma ricevuta oggi, perché il denaro di cui si dispone oggi può essere prestato guadagnando interessi. La somma da ricevere in una data futura deve essere scontata dividendola per il fattore di cui la somma attuale crescerebbe se venisse data in prestito fino a tale data. Ne consegue che esiste un diverso fattore di sconto per ciascuna data futura.

Il valore attuale di una successione di flussi di cassa è la somma delle grandezze scontate dei singoli flussi. Una banca ideale può trasformare una successione di flussi di cassa in qualsiasi altra successione con lo stesso valore attuale.

Il tasso interno di rendimento di una successione di flussi di cassa è il tasso di interesse che, se utilizzato per valutare il valore attuale della successione, fa sì che tale valore attuale sia pari a zero. In generale, questo tasso non è ben definito; lo è quando la successione prevede un flusso negativo iniziale seguito da flussi positivi.

Valore attuale e tasso interno di rendimento sono i due criteri principali utilizzati per valutare le proposte di investimento che generano successioni di flussi deterministiche. Secondo il criterio del valore attuale, quando vi sono più alternative si sceglie quella con il valore attuale maggiore. Secondo il criterio del tasso interno di rendimento va scelta, invece, l'alternativa con il maggiore tasso interno di rendimento.

Le analisi che adottano questi criteri non sono sempre semplici. In particolare, occorre considerare con attenzione le differenti durate dei cicli, le tasse e l'inflazione.

Esercizi

- (un'interessante eredità). Supponiamo che 1 dollaro americano sia stato investito nel 1776 al tasso del 3.3% con interessi capitalizzati annualmente.
 - Quanto varrebbe oggi, approssimativamente, quell'investimento: 1000, 10 000, 100 000 o 1 000 000 dollari?
 - E se il tasso di interesse fosse stato del 6.6%?
- (regola del 72). Il numero n degli anni necessari perché un investimento al tasso di interesse r raddoppi il proprio valore deve soddisfare la condizione $(1+r)^n = 2$. Utilizzando $\ln 2 = 0.69$ e l'approssimazione $\ln(1+r) \approx r$ valida per piccoli valori di r , mostrate che $n \approx 69/i$, dove i è la percentuale del tasso di interesse (ovvero, $i = 100r$). Utilizzando poi la migliore approssimazione $\ln(1+r) \approx r - \frac{1}{2}r^2$, mostrate che per $r \approx 0.08$ vale $n \approx 72/i$.

- (tassi effettivi). Trovate i tassi effettivi corrispondenti a:
 - 3% con capitalizzazione mensile;
 - 18% con capitalizzazione mensile;
 - 18% con capitalizzazione trimestrale.
- (metodo di Newton♦). Il tasso interno di rendimento viene generalmente calcolato utilizzando una procedura iterativa. Definiamo ad esempio $f(\lambda) = -a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 + \dots + a_n\lambda^n$, dove gli a_i sono positivi e $n > 1$. Riportiamo una tecnica iterativa che genera una sequenza $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k, \dots$ di valori che convergono alla radice $\bar{\lambda} > 0$, per la quale si ha $f(\bar{\lambda}) = 0$. Iniziate con un valore $\lambda_0 > 0$ vicino alla soluzione. Assumendo che sia stato calcolato λ_k , calcolate

$$f'(\lambda_k) = a_1 + 2a_2\lambda_k + 3a_3\lambda_k^2 + \dots + na_n\lambda_k^{n-1}$$

e definite

$$\lambda_{k+1} = \lambda_k - \frac{f(\lambda_k)}{f'(\lambda_k)}$$

Questo è il metodo di Newton; si basa sull'approssimazione della funzione f per mezzo di una retta tangente al suo grafico in λ_k , come mostrato nella Figura 2.4. Provate la procedura su $f(\lambda) = -1 + \lambda + \lambda^2$. Iniziate con $\lambda_0 = 1$ e calcolate i primi quattro approssimanti.

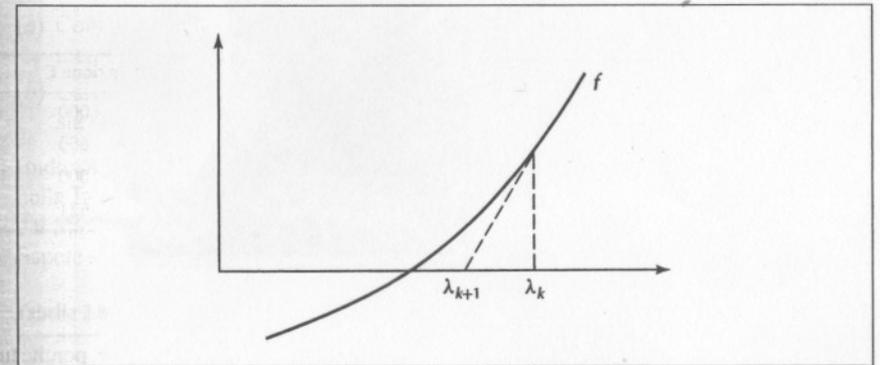


Figura 2.4 Il metodo di Newton.

- (un premio). La pubblicità di un'importante lotteria afferma che il premio per il vincitore è di €10 milioni. Questo premio in denaro viene però versato a rate di €500 000 l'anno (il primo pagamento è immediato) per un totale di 20 pagamenti. Qual è il valore attuale del premio al 10% di interesse?

♦ Gli esercizi indicati da ♦ sono più complessi della media dal punto di vista matematico.

6. (costi irrecuperabili). Una giovane coppia versa in modo non rimborsabile l'importo del primo mese (pari a €1000) per l'affitto semestrale di un appartamento. Il giorno successivo trova un altro appartamento altrettanto soddisfacente, per il quale il canone di affitto è di soli €900. Progetta di abitare l'appartamento per soli 6 mesi. Dovrebbe passare al nuovo appartamento? E se prevedesse di abitarvi per un anno? Assumete che il tasso di interesse sia del 12%.
7. (scorciatoia). Gavin Jones è curioso e determinato a imparare sia la teoria degli investimenti, sia la sua pratica. Consulta il coltivatore per ottenere ulteriori informazioni, scoprendo che è possibile rimandare il taglio degli alberi dell'Esempio 2.4 di un altro anno. Il coltivatore afferma che, dal punto di vista del valore attuale, non ne vale la pena. Gavin deduce immediatamente che il ricavo ottenuto deve essere minore di x . Quanto vale x ?
8. (fotocopiatrici*). Sono disponibili due fotocopiatrici, entrambe con vita utile di 5 anni. Una di esse può essere noleggiata o direttamente acquistata; l'altra deve essere acquistata. In totale le opzioni sono quindi tre: A, B e C. I dettagli sono esposti nella Tabella 2.6 (la manutenzione per il primo anno è compresa nel costo iniziale. Vi sono poi altri quattro pagamenti per la manutenzione all'inizio di ogni anno, seguiti dai ricavi della vendita dell'usato). Nella tabella sono indicati anche i valori attuali delle spese relative alle tre opzioni, calcolati per un tasso di interesse del 10%. Secondo il criterio del valore attuale si dovrebbe scegliere l'opzione B, ovvero la macchina il cui costo, misurato dal valore attuale, è minore.

Tabella 2.6 Opzioni per le fotocopiatrici.

	Opzione A	Opzione B	Opzione C
Spesa iniziale	6 000	30 000	35 000
Spesa annua	8 000	2 000	1 600
Valore dell'usato	0	10 000	12 000
Valore attuale (al 10%)	31 359	30 131	32 621

L'opzione A è un noleggio; le opzioni B e C sono acquisti di due macchine differenti. Entrambe le fotocopiatrici hanno vita utile di 5 anni.

Non è possibile calcolare il tasso interno di rendimento delle alternative, perché tutti i flussi di cassa sono negativi (tranne i valori dell'usato). È però possibile calcolare il tasso interno di rendimento in senso incrementale. Determinate il tasso interno di rendimento corrispondente al passaggio da A a B. Sulla base del tasso interno di rendimento tale passaggio è giustificato?

9. (una valutazione). State considerando l'acquisto di una casa. È perfetta per voi sotto ogni aspetto ed è in condizioni eccellenti, tranne per il tetto, che durerà solo altri 5 anni. Un tetto nuovo durerebbe 20 anni, ma costerebbe €20 000. Ci si attende che la casa duri per sempre. Assumendo che i costi rimangano costanti e che il tasso di interesse sia del 5%, quale valore assegnereste al tetto esistente?

10. (detrazione per esaurimento del petrolio*). Un facoltoso investitore spende 1 milione di euro per trivellare e costruire un pozzo di petrolio con giacimenti stimati in 200 000 barili. Il pozzo sarà attivo per 5 anni, producendo le quantità stimate elencate nella seconda colonna della Tabella 2.7. Si stima che verrà venduto a €20 al barile. È indicato anche il reddito netto di ciascun anno.

Tabella 2.7 Dettagli dell'investimento petrolifero.

Anno	Barili prodotti	Ricavo lordo	Reddito netto	Opz. 1	Opz. 2	Detraz. per esaurimento	Reddito imponibile	Imposta	Reddito post-tasse
1	80 000	1 600 000	1 200 000	352 000	400 000	400 000	800 000	360 000	840 000
2	70 000	1 400 000	1 000 000						
3	50 000	1 000 000	500 000						
4	30 000	600 000	200 000						
5	10 000	200 000	50 000						

Una detrazione per esaurimento, a scopi fiscali, può essere calcolata ogni anno in due modi: 22% del ricavo lordo fino al 50% del reddito netto prima di tale deduzione (opzione 1), oppure il costo del prodotto in termini di investimento, uguale in questo caso al costo unitario delle riserve, €5 al barile (opzione 2). La detrazione viene dedotta dal reddito netto per determinare il reddito imponibile. L'investitore rientra nello scaglione d'imposta con aliquota del 45%.

(a) Completate la Tabella 2.7 e mostrate che la detrazione totale supera l'investimento iniziale.

(b) Calcolate VA e TIR per questo investimento, assumendo che il tasso di interesse sia del 20%.

11. (indicazioni contrastanti*). Considerate i due progetti con i flussi di cassa riportati nella Tabella 2.8. Determinate tasso interno di rendimento e valore attuale con tasso del 5% per i due progetti. Mostrate che TIR e VA forniscono indicazioni differenti. Sapete spiegare perché?

Tabella 2.8 Flussi di cassa dei progetti.

	Anni					
	0	1	2	3	4	5
Progetto 1	-100	30	30	30	30	30
Progetto 2	-150	42	42	42	42	42

12. (dominazione). Supponete che due progetti concorrenti abbiano successioni di flussi di cassa della forma $(-A_1, B_1, B_1, \dots, B_1)$ e $(-A_2, B_2, B_2, \dots, B_2)$, che tali successioni abbiano la stessa durata e che A_1, A_2, B_1 e B_2 siano tutti positivi. Assumete inoltre che $B_1/A_1 > B_2/A_2$. Dimostrate che il progetto 1 ha un tasso interno di rendimento maggiore del progetto 2.

13. (intersezione*). In generale diciamo che due progetti con pagamenti x_i e y_i , $i = 0, 1, 2, \dots, n$, si intersecano se $x_0 < y_0$ e $\sum_{i=0}^n x_i > \sum_{i=0}^n y_i$. Siano $VA_x(d)$ e $VA_y(d)$ i valori attuali dei due progetti quando il fattore di sconto è d .
- (a) Dimostrate che esiste un valore di intersezione $c > 0$ per cui $VA_x(c) = VA_y(c)$.
- (b) Calcolate il valore di intersezione c per l'Esercizio 11.
14. (scelta di ammortamento). Negli Stati Uniti, per l'ammortamento delle attività poste in essere dopo il dicembre 1980 deve essere utilizzato il sistema ACRS (Accelerated Cost Recovery System). Con questo sistema, le attività vengono classificate in categorie che specificano l'effettiva vita fiscale. La categoria "proprietà per 3 anni", ad esempio, comprende automobili, motrici per rimorchi, autocarri leggeri e determinati strumenti produttivi. Per la categoria "proprietà per 3 anni", le percentuali del costo che possono essere dedotte per ciascuno dei 3 anni che seguono l'acquisto (compreso l'anno dell'acquisto in questione) sono 25%, 38% e 37%, rispettivamente. La norma fiscale consente di utilizzare anche il metodo ACRS alternativo, che per le proprietà a 3 anni consiste nell'applicare per 3 anni la quota costante del 33 1/3 %.
- Quale di questi metodi è preferibile per un individuo che desideri massimizzare il valore attuale dell'ammortamento? In che modo la scelta dipende dal tasso di interesse considerato?
15. (analisi errata). Una divisione di ABBOX Corporation ha sviluppato un nuovo prodotto. La sua produzione richiederebbe l'impegno iniziale di un capitale di 10 milioni di euro. Si prevede la vendita di un milione di unità l'anno per 5 anni, dopo i quali il prodotto diverrebbe obsoleto e la produzione verrebbe cessata. La produzione richiederebbe ogni anno 10 000 ore di lavoro e 100 tonnellate di materia prima. Attualmente il salario medio è di €30 l'ora e il costo della materia prima è di €100 la tonnellata. Il prodotto verrebbe venduto al prezzo di €3.30 per unità, che si prevede rimanga costante (in termini reali). Per i progetti di questo tipo ABBOX adotta un tasso di sconto del 12% e il suo profitto viene tassato per il 34%. L'impegno di capitale iniziale può essere ammortizzato per quote costanti in 5 anni. Nella prima analisi del progetto la direzione dell'azienda non ha applicato tassi di inflazione ai ricavi e ai costi operativi estrapolati. Quale valore attuale ha ottenuto? Come sarebbe cambiato il risultato se fosse stato applicato un tasso di inflazione del 4%?

Riferimenti

La teoria di interesse, capitalizzazione, valore attuale e tasso interno di rendimento è trattata in modo esauriente in molta letteratura. I testi [1-5] sono rivolti agli investimenti e trattano nozioni generali sull'interesse. L'impiego dei concetti di valore attuale netto e tasso interno di rendimento per classificare varie alternative di investimento viene sviluppato esaurientemente in riferimento al campo dell'economia applicata all'ingegneria. In questo campo sono eccellenti i testi [6-9]. [10] è uno studio più avanzato dell'interesse; contiene una versione in tempo continuo dell'esempio "quando tagliare un albero", che ha ispirato l'esempio riportato nel Paragrafo 2.5. L'Esercizio 10 è tratto da un esempio del testo [6].

1. Alexander, G. J., W. F. Sharpe e V. J. Bailey (1993), *Fundamentals of Investment*, 2nd ed., Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ.
2. Bodie, H. M., A. Kane e A. J. Marcus (1993), *Investments*, 2nd ed., Irwin, Homewood, IL.
3. Brealey, R. e S. Meyers (1981), *Principles of Corporate Finance*, McGraw-Hill, New York.
4. Francis, J. C. (1991), *Investments: Analysis and Management*, 5th ed., McGraw-Hill, New York.
5. Haugen, R. A. (1993), *Modern Investment Theory*, 3rd ed., Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ.
6. DeGarmo, E. P., W. G. Sullivan e J. A. Bontadelli (1988), *Engineering Economy*, 8th ed., Macmillan, New York.
7. Grant, E. L., W. G. Ireson e R. S. Leavensworth (1982), *Principles of Engineering Economy*, 7th ed., Wiley, New York.
8. Steiner, H. M. (1992), *Engineering Economy*, McGraw-Hill, New York.
9. Thuesen, G. J. e W. J. Fabrycky (1989), *Engineering Economy*, 7th ed., Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ.
10. Hirshleifer, J. (1970), *Investment, Interest, and Capital*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ.