MATEMATICA PER LE APPLICAZIONI ECONOMICHE - (n-z)

20 settembre 2010

Cognome Nome .... Matricola ....

Firma ....

1) *(6 p.ti)* Quanti pagamenti sono necessari per rimborsare D euro con rate costanti semestrali di importo non superiore a K euro se il tasso di interesse annuo è 12% e la capitalizzazione degli interessi è semestrale? Riportare la prima riga del piano di ammortamento corrispondente. $[D = 1000, K = 150]$

Il numero di pagamenti deve essere maggiore o uguale di $x = \log\left(1 - r\frac{D}{K}\right)/\log(d)$

dove $r = \frac{12\%}{2} = 6\%$ e $d = (1+r)^{-1}$

Il numero di pagamenti N necessari è pari al più piccolo intero maggiore di x

Una volta trovato N, la prima riga del piano di ammortamento si trova con

$$R = D/a_{\overline{N}|r}, \quad I_1 = D \cdot r, \quad C_1 = R - I_1,$$

$$D_1 = D - C_1.$$

2) *(6 p.ti)* Data la struttura dei fattori di sconto a pronti $d(0,1), d(0,2), d(0,3), d(0.4)$ (dove il tempo è espresso in anni), calcolare

1. Il prezzo a pronti e la duration del flusso

$$x|t = \{10, 0, 110\}|\{2, 3, 4\}$$

2. L'importo I per cui il flusso

$$x|t = \{-1000, I, I, 1000 + I\}|\{0, 1, 2, 3\}$$

è equo (cioè ha valore nullo) in $t = 0$.

3. Il TAN che deve avere un titolo che paga cedole annuali e matura tra 3 anni per quotare sotto la pari.

$$[d(0,1) = 0.98, d(0,2) = 0.97, d(0,3) = 0.96, d(0.4) = 0.955]$$

1. Prezzo a pronti

$$V_0 = 10\, d(0,2) + 110\, d(0,4)$$

Duration

$$D_0 = \frac{10 \cdot 2 \cdot d(0,2) + 110 \cdot 4 \cdot d(0,4)}{V_0}$$

2. Risolvo rispetto a I:

$$-1000 + I\, d(0,1) + I\, d(0,2) + (1000 + I)\, d(0,3) = 0$$

$$\Rightarrow I = \frac{1000(1 - d(0,3))}{\sum_{k=1}^{3} d(0,k)}$$

3. Il tasso di parità è $J = \frac{I}{1000}$

quindi ogni titolo con TAN $< J$ quota sotto la pari.

3) *(6 p.ti)* I prezzi a pronti degli zero coupon bond unitari che scadono rispettivamente tra 5 e tra 10 anni sono P_1 e P_2. Il prezzo a termine, con consegna tra 5 anni, dello zero coupon bond che scade tra 10 anni è P_3. Mostrare come effettuare un arbitraggio in modo da ricavare con certezza 2500 Euro all'istante iniziale senza nessun esborso successivo, indicando quante quote degli zcb vanno acquistate/vendute a pronti/termine nei diversi istanti di tempo.
$[P_1 = 0.95, P_2 = 0.93, P_3 = 0.97]$

Sia $x = -d(0,5,10)\,d(0,5) + d(0,10) = -P_3 \cdot P_1 + P_2$

Dato che $x > 0$ si può realizzare un arbitraggio.

Sia $C = +2500/x$. La strategia per ottenere 2500 €:

	0	5	10
1. Vendo ~~Acquisto~~ a pronti C zcb che scadono in 10	$+C\cdot P_2$	0	$-C$
2. Compro ~~Vendo~~ a pronti $C\cdot P_3$ zcb che scadono in 5	$-C P_3 P_1$	$+C P_3$	0
3. Compro ~~Vendo~~ a termine C zcb che scadono in 10	0	$-C P_3$	$+C$
	$C(-P_3 P_1 + P_2) = 2500$	0	0

4) *(6 p.ti)* Il rendimento del portafoglio A ha media m_A e deviazione standard σ_A, mentre quello del portafoglio B ha media m_B e deviazione standard σ_B. La correlazione tra i due rendimenti è pari a ρ. Si vuole investire un patrimonio $W = 2500$ tra i due portafogli in modo da ottenere un rendimento atteso pari al doppio di m_A. Quanto denaro occorre investire in A e quanto in B? Qual è la varianza del rendimento dell'investimento?
$[m_A = 5\%, \sigma_A = 20\%, m_B = 30\%, \sigma_B = 40\%, \rho = 0.3]$

Sia α la percentuale di W investita in A:

Troviamo α risolvendo

$$\alpha\, m_A + (1-\alpha)\, m_B = 2 m_A \Rightarrow \alpha = \frac{2m_A - m_B}{m_A - m_B}$$

Il denaro investito in A è αW, quello investito in B è $(1-\alpha)W$.

La varianza del rendimento dell'investimento è:

$$\sigma^2 = \alpha^2 \sigma_A^2 + (1-\alpha)^2 \sigma_B^2 + 2\alpha(1-\alpha)\rho\,\sigma_A \sigma_B$$

5) Rispondere alle seguenti domande (2 p.ti risposta esatta, -1 p.to risposta errata):

1. Considerare un flusso di pagamenti a rata costante annuale di durata N anni. Il valore attuale del flusso rispetto a un tasso annuo $i > 0$...

    (a) ...è crescente rispetto a N e illimitato per N che tende a infinito.

    (b) ...è crescente rispetto a N e limitato per N che tende a infinito.

    (c) ...è decrescente rispetto a N e tende a 0 per N che tende a infinito.

2. Quale delle seguenti azioni comporta più verosimilmente una diminuzione della duration di un portafoglio obbligazionario?

    (a) vendere BOT e acquistare CCT

    (b) vendere BOT e acquistare BTP

    (c) vendere CCT e acquistare BTP

3. Per un titolo a tasso variabile...

    (a) il flusso di pagamenti è aleatorio come il valore attuale

    (b) il flusso di pagamenti è aleatorio ma il valore attuale è deterministico

    (c) il flusso di pagamenti è deterministico ma il valore attuale è aleatorio

    (d) nessuno dei precedenti