

MATEMATICA PER LE APPLICAZIONI ECONOMICHE

Prova di Esonero 14 Aprile 2011

Cognome e Nome Matricola

Firma

1	2	3	4	5	TOT
---	---	---	---	---	-----

1) (6 p.ti) Per utilizzare un macchinario per i prossimi 30 anni sono disponibili due opzioni:

- Opzione A (acquisto). Tale opzione prevede una spesa iniziale P ed una spesa annuale di manutenzione I . Dato che la macchina dura 10 anni, tale ciclo dovrà essere ripetuto tre volte.
- Opzione B (affitto). Tale opzione prevede il pagamento di un canone di affitto costante, da pagarsi anticipatamente ogni due anni (quindi un totale di 15 rate, la prima al tempo 0, l'ultima al tempo 28).

1. (3 p.ti). Calcolare il valore attuale dell'opzione A rispetto al tasso annuo r .

2. (3 p.ti). Determinare l'importo R del canone di affitto biennale per il quale le due opzioni risultano equivalenti secondo il criterio del VAN.

Soluzione: Sia $d = \frac{1}{1+r}$ il fattore di sconto annuale. Il valore attuale del primo ciclo (V_{10}^A) è:

$$V_{10}^A = P + d \frac{1 - d^{10}}{1 - d} I = P + \frac{1 - d^{10}}{r} I$$

Il valore attuale di A è quindi:

$$V^A = V_{10}^A [1 + d^{10} + d^{20}]$$

Il valore attuale della seconda opzione è:

$$V^B = Ra_{\overline{15}|r^*} (1 + r^*)$$

dove $r^* = (1 + r)^2 - 1$ è il tasso biennale equivalente ad r . Ne consegue che

$$R = \frac{V^A}{(1 + r^*) a_{\overline{15}|r^*}}$$

2) (4 p.ti) Considerare una struttura per scadenza dei tassi di interesse costante e pari a i .

Un investitore ha investito il 30% del suo patrimonio W in obbligazioni di duration D_1 , il 50% del suo patrimonio in obbligazioni di duration D_2 , 20% del suo patrimonio in obbligazioni di duration D_3 .

Fornire una stima approssimate del valore dell'investimento nel caso in cui

1. (3 p.ti) Il livello dei tassi i aumenti di 0.01
2. (1 p.ti) Il livello dei tassi i diminuisca di 0.005

Soluzione.

La duration del portafoglio risulta essere:

$$D_p = 0.3D_1 + 0.5D_2 + 0.2D_3$$

Sia W' il nuovo valore del portafoglio in seguito ad una variazione dei tassi pari a Δ , quindi:

$$W' - W \approx -D_p^m W \Delta$$

(con $D_p^m = \frac{D_p}{1+i}$) ovvero,

$$W' \approx W(1 - D_p^m \Delta)$$

Pertanto nel caso $\Delta = +1\%$ il valore dell'investimento diminuisce di un fattore $k = 1 - D_p^m(W/100) < 1$, viceversa nel caso $\Delta = -0.5\%$ il valore dell'investimento aumenta di un fattore $k' = 1 + D_p^m(W/200) > 1$.

3) (5 p.ti) La costruzione di un nuovo tratto autostradale ha un costo iniziale di 10 milioni di Euro. La società realizzatrice verrà ripagata con i pedaggi dei successivi 5 anni e stima che genereranno la seguente successione di flussi di cassa (in milioni di euro)

$$X = (4, 4, 4, 6, 6)|(1, 2, 3, 4, 5)$$

Utilizzando la struttura dei tassi a pronti assegnata determinare

1. La convenienza o meno dell'investimento in base al criterio del VAN.
2. Il valore attuale in $t = 3$, secondo la dinamica basata sulle aspettative, dei pedaggi che verranno pagati in $t = 4$ e in $t = 5$.

Soluzione:

$$\text{Posto } d_k \equiv d(0, k) = (1 + s_k)^{-k},$$

$$V_0 = -10 + 4(d_1 + d_2 + d_3) + 6(d_4 + d_5)$$

L'investimento risulta conveniente se tale valore risulta positivo.

(b) Si ha,

$$V_3 = \frac{d_4}{d_3}6 + \frac{d_5}{d_3}6$$

4) (6 p.ti) In un mercato con N titoli i portafogli A e B sono efficienti. I rendimenti di tali portafogli sono non correlati, con deviazioni standard σ_A e σ_B e valori attesi r_A , r_B .

1. (3 p.ti) Determinare il rendimento atteso \bar{r} del portafoglio efficiente di minima varianza.
2. (3 p.ti) In tale mercato esiste un portafoglio efficiente con varianza dei rendimenti pari alla media tra le varianze dei rendimenti di A e di B ? In caso di risposta affermativa, calcolarne il rendimento atteso.

Sol:

1) Per il teorema dei due fondi tutti i portafogli efficienti si ottengono combinando linearmente i portafogli A e B . Si tratta pertanto di minimizzare in α l'espressione $\alpha^2\sigma_A^2 + (1 - \alpha)^2\sigma_B^2$. La soluzione è data da:

$$\bar{\alpha} = \frac{\sigma_B^2}{\sigma_A^2 + \sigma_B^2}$$

e perciò il rendimento atteso del portafoglio di minima varianza è uguale a:

$$\bar{r} = \frac{\sigma_B^2}{\sigma_A^2 + \sigma_B^2} r_A + \frac{\sigma_A^2}{\sigma_A^2 + \sigma_B^2} r_B$$

2) La varianza del portafoglio a varianza minima è pari a

$$\bar{\sigma} = \bar{\alpha}^2\sigma_A^2 + (1 - \bar{\alpha})^2\sigma_B^2 = \frac{\sigma_A^2\sigma_B^2}{\sigma_A^2 + \sigma_B^2}(\sigma_A^2 + \sigma_B^2)$$

dato che

$$\frac{\sigma_A^2 + \sigma_B^2}{2} > \bar{\sigma}$$

esiste un portafoglio efficiente con varianza dei rendimenti pari alla media tra le varianze dei rendimenti di A e di B .

Per un tale portafoglio deve valere

$$\alpha^2\sigma_A^2 + (1 - \alpha)^2\sigma_B^2 = \frac{\sigma_A^2 + \sigma_B^2}{2}$$

cioè,

$$\alpha^2(\sigma_A^2 + \sigma_B^2) - 2\alpha\sigma_B^2 + \sigma_B^2 - \frac{\sigma_A^2 + \sigma_B^2}{2} = 0$$

che è un'equazione di secondo grado in α , le cui soluzioni sono:

$$\alpha_{1,2} = \frac{\sigma_B^2 \pm \sqrt{\sigma_B^4 - (\sigma_A^2 + \sigma_B^2)(\sigma_B^2 - \frac{\sigma_A^2 + \sigma_B^2}{2})}}{\sigma_A^2 + \sigma_B^2}$$

Il rendimento atteso massimo tra i due possibili valori di α si ottiene scegliendo quello che dà più peso al titolo con rendimento atteso maggiore, cioè in questo caso il titolo B, quindi si deve prendere

$$\alpha_2 = \frac{\sigma_B^2 - \sqrt{\sigma_B^4 - (\sigma_A^2 + \sigma_B^2)(\sigma_B^2 - \frac{\sigma_A^2 + \sigma_B^2}{2})}}{\sigma_A^2 + \sigma_B^2}$$

Il rendimento atteso del portafoglio è

$$\bar{r} = \alpha_2 r_A + (1 - \alpha_2) r_B$$

5) 5a) Rispondere alla seguente domanda (2 p.ti risposta esatta, -1 p.to risposta errata)
Supponiamo che il tasso a pronti a un anno sia maggiore del tasso a pronti a due anni, allora:

1. il tasso a termine tra uno e due anni è sempre compreso tra i due tassi a pronti.
2. il tasso a termine tra uno e due anni è sempre più grande dei due tassi a pronti.
3. il tasso a termine tra uno e due anni è sempre più piccolo dei due tassi a pronti.
4. il tasso a termine può essere compreso tra i due tassi a pronti oppure maggiore di entrambi, a seconda dei casi.

Soluzione:

(6 p.ti) *Enunciare e dimostrare la relazione fondamentale tra tassi spot e tassi forward, indicando con $s(t_1)$ il tasso spot con scadenza tra t_1 anni, con $s(t_2)$ il tasso spot con scadenza tra t_2 anni e con $f(t_1, t_2)$ il tasso forward tra t_1 e t_2 , con $t_1 < t_2$.*

Sol: In regime di capitalizzazione composta la relazione risulta essere:

$$(1 + f(t_1, t_2))^{t_2 - t_1} = \frac{(1 + s(t_2))^{t_2}}{(1 + s(t_1))^{t_1}}$$

Supponiamo che al contrario valga $(1 + f(t_1, t_2))^{t_2 - t_1} > \frac{(1 + s(t_2))^{t_2}}{(1 + s(t_1))^{t_1}}$, ovvero

$$(1 + s(t_1))^{t_1} (1 + f(t_1, t_2))^{t_2 - t_1} > (1 + s(t_2))^{t_2}$$

allora possiamo operare un arbitraggio nel modo seguente: a $t = 0$ prendiamo in prestito 1 euro al tasso $s(t_2)$, impegnandoci perciò a restituirne $(1 + s(t_2))^{t_2}$ al tempo t_2 . Sempre a $t = 0$ investiamo, per un tempo pari a t_1 , tale euro su un deposito che paga il tasso $s(t_1)$ e al contempo ci impegniamo per un deposito pari a $(1 + s(t_1))^{t_1}$ euro al tasso $f(t_1, t_2)$ per il periodo $[t_1, t_2]$. Al tempo t_2 i soldi depositati avranno generato il capitale $(1 + s(t_1))^{t_1} (1 + f(t_1, t_2))^{t_2 - t_1}$ superiore all'importo del prestito da restituire.

Se vale disuguaglianza opposta l'arbitraggio si prova con un analogo ragionamento .

Altrimenti, con un procedimento simile al precedente, si può dimostrare la medesima relazione utilizzando i fattori di sconto a pronti e a termine:

$$(1 + s(t_1))^{-t_1} (1 + f(t_1, t_2))^{-(t_2 - t_1)} > (1 + s(t_2))^{-t_2}$$