

# MATEMATICA PER LE APPLICAZIONI ECONOMICHE

Prova di Esame 8 Giugno 2011

Cognome e Nome .....  
Matricola .....  
Firma ..... *SOLVZIONE*

1	2	3	4	5	TOT
---	---	---	---	---	-----

1) (6 p.ti) Un macchinario ha un costo di acquisto di C euro e per i successivi 12 anni, a partire dalla fine del primo anno, il suo utilizzo genererà un ricavo annuo di X euro.

1. (4 p.ti) Determinare il valore annuo A dell'intero progetto di investimento rispetto ad un tasso annuo r.

2. (2 p.ti) Qual è il valore minimo m del ricavo annuo affinché l'investimento risulti conveniente?

Dati: [C = 150000; X = 30000; r = 15%] Risposte: A = ..... m = .....  
Svolgimento:

$$1. \quad A = -\frac{C}{a_{\overline{12}|r}} + X = -\frac{C}{1 - (1+r)^{-12}} + X$$

$$2. \quad m = \frac{C}{a_{\overline{12}|r}} \quad \text{e il valore minimo del ricavo} \\ \text{il valore annuo positivo.}$$

2) (6 p.ti) Le quotazioni odierne degli zero coupon bond con scadenze scadenze 3 mesi, 9 mesi ed 1 anno sono, rispettivamente  $P_3, P_9, P_{12}$ . Inoltre, un'obbligazione con cedola trimestrale, TAN=8% e scadenza tra 6 mesi ha un prezzo  $Q$ . Determinare:

1. (2 p.ti) I tassi a pronti (in percentuale e su base annua)  $s_3, s_6, s_9$  con scadenze tra 3, 6, 9 mesi.
2. (2 p.ti) Il valore attuale  $V_0$  di un capitale  $C=1250$  disponibile tra 6 mesi.
3. (2 p.ti) Il tasso a termine (in percentuale e su base annua)  $f_{3,6}$  tra 3 e 6 mesi.

Dati:  $P_3 = 98, P_9 = 97, P_{12} = 96.5, Q = 98$

Risposte:  $s_3 = \dots, s_6 = \dots, s_9 = \dots, V_0 = \dots, f_{3,6} = \dots$

Svolgimento:

I fattori di sconto a 3, 6, 9, e 12 mesi sono

$$d(0,3) = \frac{P_3}{100}, \quad d(0,6) = \frac{P_6}{100}, \quad d(0,9) = \frac{P_9}{100}, \quad d(0,12) = \frac{P_{12}}{100}$$

Inoltre:

$$Q = 2 \cdot d(0,3) + 102 d(0,6)$$

da cui si trova

$$d(0,6) = \frac{102}{Q - 2d(0,3)}$$

I tassi a pronti sono:

$$s_3 = d(0,3)^{-1/3} - 1, \quad s_6 = d(0,6)^{-1/6} - 1, \quad s_9 = d(0,9)^{-1/9} - 1$$

2.

$$V_0 = C \cdot d(0,6)$$

3.

$$d(0,3,6) = \frac{d(0,6)}{d(0,3)}$$

$$f(3,6) = d(0,3,6)^{-12/3} - 1$$

(3) (6 p.ti) La costruzione di un nuovo tratto autostradale ha un costo iniziale di 10 milioni di Euro. La società realizza richiede un finanziamento per coprire completamente tale costo, essendo disposta a pagare rate annuali non superiori a K milioni di euro, ad un tasso annuo  $i$ .

1. (3 p.ti) Quanti anni N sono necessari per rimborsare il debito con un rimborso a rata costante? Qual è l'importo della rata R?

2. (3 p.ti) Riportare la prima quota capitale  $C_1$  e quota interesse  $I_1$ .

Dati:  $[K = 2.5, i = 12\%]$

Risposte:  $N = \dots$ ,  $R = \dots$ ,  $C_1 = \dots$ ,  $I_1 = \dots$

Svolgimento:

1. Sia  $X = \frac{\log(2 - \frac{D \cdot i}{K})}{\log(\alpha)}$

allora il numero N è uguale al più piccolo numero

intero maggiore di X.

La rata R si ottiene con

$$R = \frac{D}{a_{\overline{N}|i}} = \frac{D \cdot i}{(1 - \alpha)^N}$$

$$2. I_1 = i \cdot D$$

$$C_1 = R - I_1$$

4) (6 p.ti) Un mercato è composto da tre titoli i cui tassi di rendimento  $r_1, r_2, r_3$  sono indipendenti con valori attesi  $\bar{r}_1, \bar{r}_2, \bar{r}_3$  e deviazioni standard  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ .

1. (3 p.ti) Il primo dei tre titoli è efficiente in media-varianza?

2. (3 p.ti) Il portafoglio composto da quote uguali (cioè  $(1/3, 1/3, 1/3)$ ) dei tre titoli è efficiente in media-varianza?

Dati:  $[\bar{r}_1 = 2.5\%, \bar{r}_2 = 2.5\%, \bar{r}_3 = 3\%, \sigma_1 = 20\%, \sigma_2 = 25\%, \sigma_3 = 30\%]$

Svolgimento:

Le condizioni necessarie sono:

$$\begin{pmatrix} G_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & G_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & G_3^2 \end{pmatrix} - \mu \begin{pmatrix} \bar{r}_1 \\ \bar{r}_2 \\ \bar{r}_3 \end{pmatrix} - \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

1. I I primo titolo è efficiente se  $\exists \lambda, \mu$  t.c.

$$\lambda \begin{pmatrix} \bar{r}_1 \\ \bar{r}_2 \\ \bar{r}_3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_1^2 \\ G_2^2 \\ G_3^2 \end{pmatrix} \quad \text{cioè se} \quad \det \begin{pmatrix} \bar{r}_1 & \bar{r}_2 & \bar{r}_3 \\ \bar{r}_1 & \bar{r}_2 & 1 \\ \bar{r}_1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \neq 0$$

2. I I portafoglio è efficiente se e solo se

$$\lambda \begin{pmatrix} \bar{r}_1 \\ \bar{r}_2 \\ \bar{r}_3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} G_1^2 \\ G_2^2 \\ G_3^2 \end{pmatrix} \quad \text{cioè se} \quad \det \begin{pmatrix} \bar{r}_1 & \bar{r}_2 & \bar{r}_3 \\ \bar{r}_1 & \bar{r}_2 & 1 \\ \bar{r}_1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 0$$

5a) Rispondere alla seguente domanda 2 p.ti risposta esatta, -1 p.to risposta errata  
Quale delle seguenti obbligazioni risulta più sensibile rispetto alle variazioni dei tassi di interesse?

1. coupon bond con scadenza 10 anni e TAN 10%

2. zero coupon bond con scadenza 10 anni ✓

3. zero coupon bond con scadenza 1 anno

4. coupon bond con scadenza 2 anni e TAN 5%

5b) (6 p.ti) Il valore attuale di un titolo che paga cedole costanti  $I$  e rimborsa il capitale a scadenza è

$$V_0 = \frac{I}{1+r} + \frac{I}{(1+r)^2} + \dots + \frac{C+I}{(1+r)^N}$$

Dimostrare che, se il titolo quota alla pari, il tasso interno di rendimento è pari al tasso cedolare  $I/C$ .

Se al titolo quote alla pari il suo valore coincide con  $C/I$ , quindi:

$$C = I \cdot \sum_{k=1}^N (1+r)^{-k} + C \cdot (1+r)^{-N}$$

$$C = I \cdot \frac{1 - (1+r)^{-N}}{r} + C \cdot (1+r)^{-N}$$

dove  $d = (1+r)^{-1}$

$$\Rightarrow C(1-d^N) = I \frac{1-d^N}{r}$$

$$\Rightarrow r = \frac{C}{I}$$