MATEMATICA PER LE APPLICAZIONI ECONOMICHE

Prova di Esame 21 Giugno 2011

Cognome e Nome .... Matricola ....

Firma .... SOLUZIONI

1	2	3	4	5	TOT

1) *(4 p.ti)* Considerare il flusso di cassa

$$\{-50, -70, x, 115\}|\{0, 2, 4, 5\}$$

dove il tempo è misurato in **anni**. Se il TIR è r, quanto vale x?
Dati: $r = 20\%$
Risposte: $x =$ ....

$$-50 - 70(1+r)^{-2} + x(1+r)^{-4} + 115(1+r)^{-5} = 0$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{50 + 70(1+r)^{-2} - 115(1+r)^{-5}}{(1+r)^{-4}}$$

$$= 50(1+r)^4 + 70(1+r)^2 - 115(1+r)^{-1}$$

2) *(4 p.ti)* Consideriamo una legge di capitalizzazione degli interessi composti, con tasso annuo i:

1. (2) Per quale valore di i un capitale raddoppia in quattro anni?
2. (2) Se i=8%, quanto tempo occorre aspettare perchè un capitale triplichi?

Risposte: $i =$ .... ,$t =$ ....

1. $C = 2C(1+i)^{-4} \Rightarrow (1+i) = \left(\frac{1}{2}\right)^{-1/4} \Rightarrow i = 2^{1/4} - 1$

2. $C = 3C(1+i)^{-t} \Rightarrow -t\log(1+i) = \log(1/3) \Rightarrow t = \frac{\log(3)}{\log(1+i)}$

2) *(10 p.ti)* La seguente tabella riporta i pagamenti di quattro obbligazioni:

	A	B	C	D
Anno 1	10	5	0	0
Anno 2	10	105	100	0
Anno 3	110	0	0	100

Considerando una struttura per scadenza dei tassi di interesse costante al livello r, determinare:

1. (2) I prezzi di ciascuna obbligazione.
2. (2) La duration di ciascuna obbligazione.
3. (2) Quale obbligazione è più sensibile alle variazioni di rendimento.
4. (2) Supponete di dovere pagare un capitale X tra due anni e mezzo. Quanto denaro occorre investire nei titoli C e D per ottenere un portafoglio immunizzato?
5. (2) Volendo utilizzare per l'immunizzazione un'obbligazione diversa dalla C, mantenendo invece la D, potreste utilizzare l'obbligazione A? E l'obbligazione B?

Dati: $r = 20\%$, $\bar{X} = 1M€$

Risposte:

1. $P_A = \ldots\ldots$, $P_B = \ldots\ldots$, $P_C = \ldots\ldots$, $P_D = \ldots\ldots$
2. $D_A = \ldots\ldots$, $D_B = \ldots\ldots$, $D_C = \ldots\ldots$, $D_D = \ldots\ldots$
3. Quale obbligazione è più sensibile alle variazioni di rendimento?
4. Denaro investito nei titoli C e D: $x_C = \ldots\ldots$, $x_D = \ldots\ldots$
5. Potreste utilizzare l'obbligazione A? E l'obbligazione B?

Svolgimento

1.
$$P_A = 10(1+r)^{-1} + 10(1+r)^{-2} + 110(1+r)^{-3} =$$
$$P_B = 5(1+r)^{-1} + 105(1+r)^{-2}$$
$$P_C = 100(1+r)^{-2}$$
$$P_D = 100(1+r)^{-3}$$

2.
$$D_A = \frac{10(1+r)^{-1} + 2\cdot 10(1+r)^{-2} + 110\cdot 3\cdot(1+r)^{-3}}{P_A}$$
$$D_B = \frac{5(1+r)^{-1} + 105\cdot 2(1+r)^{-2}}{P_B}$$
$$D_C = 2$$
$$D_D = 3$$

3. La obbligazione D ha duration maggiore quindi è più sensibile

4. Risolvere:
$$\begin{cases} x_C + x_D = V_0 \\ 2x_C + 3x_D = 2.5 V_0 \end{cases} \quad \text{dove } V_0 = \bar{X}(1+r)^{-2.5}$$
si trova:
$$x_C = \frac{V_0}{2}, \quad x_D = \frac{V_0}{2}$$

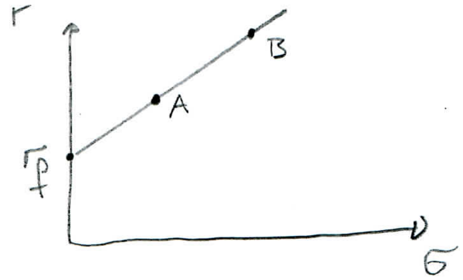
5. Occorre che la duration della seconda obbligazione sia <u>minore</u> di 2.5 quindi l'obbligazione B va <u>sempre</u> bene, mentre per l'obbligazione A dipende dal valore di r.

3) *(6 p.ti)* In un mercato composto da titoli rischiosi e da un titolo non rischioso, i portafogli A e B sono efficienti in media e varianza ed hanno rendimento atteso e deviazioni standard dei rendimenti pari a $r_A, r_B, \sigma_A, \sigma_B$.

1. (4) Calcolare il rendimento non rischioso r_f.
2. (2) Calcolare il rendimento atteso r_C del portafoglio efficiente con deviazione standard pari a tre volte σ_B.

Dati: $r_A = 12\% r_B = 15\%, \sigma_A = 20\%, \sigma_B = 40\%$
Risposte: $r_f =$ ...., $r_C =$ ....

Essendoci un titolo non rischioso la frontiera efficiente è data da una retta di equazione $r = r_f + m \cdot \sigma$



Imponendo il passaggio per i punti A e B che rappresentano i portafogli efficienti, si determinano r_f e m:

$$\begin{cases} r_A = r_f + m \cdot \sigma_A \\ r_B = r_f + m \cdot \sigma_B \end{cases}$$

quindi:

$$r_f = \frac{r_A \sigma_B - r_B \sigma_A}{\sigma_B - \sigma_A} \quad , \quad m = \frac{r_B - r_A}{\sigma_B - \sigma_A}$$

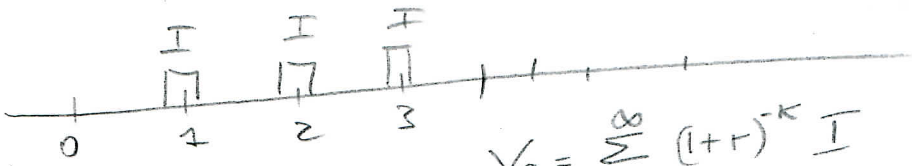
A questo punto possiamo calcolare anche

$$r_C = r_f + m \, 3\sigma_B$$

5a) Rispondere alla seguente domanda *2 p.ti risposta esatta, -1 p.to risposta errata*
La successione di flussi di cassa $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$, con $x_0 < 0$ e $x_k \geq 0$ ha TIR = q.
Il VAN calcolato rispetto a un tasso $r < q$ è

1. positivo per n pari, negativo per n dispari
2. sempre positivo
3. negativo per n pari, positivo per n dispari
4. sempre negativo
5. dipende da q

5b) *(6 p.ti)* Dimostrare che, se il tasso di interesse annuo è r, ~~la duration~~ Il valore attuale di una rendita perpetua che paga cedola costante I ogni anno è I/r.



$V_0 = \sum_{k=1}^{\infty} (1+r)^{-k} I$, quindi :

$V_0 = (1+r)^{-1} I + (1+r)^{-1} V_0$

cioè :

$V_0 (1+r) = I + V_0$

$\Rightarrow V_0 = \frac{I}{r}$