MATEMATICA PER LE APPLICAZIONI ECONOMICHE

Prova di Esame 4 Luglio 2011

Cognome e Nome .... Matricola ....

Firma ....

SOLUZIONI

1	2	3	4	5	TOT

1) *(8 p.ti)* Considerare i flussi

$$V = (-a, 2a)|(0, 2)$$

e

$$W = (-a, 1.5a)|(0, 1)$$

dove a è un importo positivo e il tempo è misurato in anni.

1. (3pt.) Determinare per quali valori del tasso annuale r il flusso V risulta preferibile al flusso W secondo il criterio del VAN.
2. (3 pt.) Determinare i tassi interni di rendimento r_V e r_W dei due flussi.
3. (2 pt.) In quali casi il VAN e il TIR danno risposte differenti?

(Dati: a=180)

1. V è preferibile se $-a + 2a(1+r)^{-2} > -a + 1.5a(1+r)^{-1}$

quindi: $2\cancel{a} > 1.5\cancel{a}(1+r) \Rightarrow r < \frac{2}{1.5} - 1 = 1/3$

2. $-\cancel{a} + 2\cancel{a}(1+r_V)^{-2} = 0 \Rightarrow 1 + r_V = \left(\frac{1}{2}\right)^{-1/2} \Rightarrow r_V = \sqrt{2} - 1$

$-\cancel{a} + 1.5\cancel{a}(1+r_W)^{-1} = 0 \Rightarrow 1 + r_W = 1.5 \Rightarrow r_W = 0.5 > r_V$

3. Secondo il criterio del TIR W è preferibile a V, quindi dal punto 1. sappiamo che il VAN dà una risposta differente se e solo se $r \geq 1/3$

2) *(4 p.ti)* Data la struttura dei fattori di sconto a pronti $d(0,1), d(0,2), d(0,3), d(0,4)$ (dove il tempo è espresso in anni), si vuole rimborsare un debito D con 4 rate annuali, costanti e posticipate, di importo R. Determinare R.

$$[d(0,1) = 0.98, d(0,2) = 0.97, d(0,3) = 0.96, d(0.4) = 0.955]$$

(Dati:D=160.000)

$$R = \frac{D}{d(0,1) + d(0,2) + d(0,3) + d(0,4)}$$

3) *(6 p.ti)* Consideriamo un mercato in cui opera una banca ideale con tasso annuo r. Sia T un titolo che rimborsa un importo costante I ogni due anni <u>per sempre</u>.

1. (3) Determinare il valore attuale di V di T.
2. (3) Il titolo T è più o meno rischioso (dal punto di vista della sensibilità alle variazioni di tasso di interesse) di uno zero coupon bond che scade tra 20 anni? Motivare la risposta.

(Dati:I=8, r=8%)

1. $$V = I \cdot \sum_{k=1}^{\infty} (1+r)^{-2k} = \frac{I}{\frac{1}{d_2} - 1}$$ dove $d_2 = (1+r)^{-2}$

cioè: $$V = \frac{I}{(1+r)^2 - 1} = \frac{I}{r_2}$$ dove $r_2 = (1+r)^2 - 1$ è il tasso biennale equivalente a r

2. Il titolo più rischioso è quello con duration maggiore.

Il titolo T ha duration: D_T:

$$V \cdot \frac{D_T}{1+r} = -V'$$

dove $$V' = \frac{d}{dr} V = \frac{d}{dr} \frac{I}{(1+r)^2 - 1} = I \, \frac{-(2r+2)}{(r^2+2r)^2}$$

quindi:

$$D_T = \frac{(2r+2)(r+1)\,(r^2+2r)}{(r^2+2r)^2} = \frac{(2r+2)(r+1)}{(r^2+2r)} = \frac{2(r+1)^2}{r(r+2)}$$

Lo ZCB ha duration 20 anni.

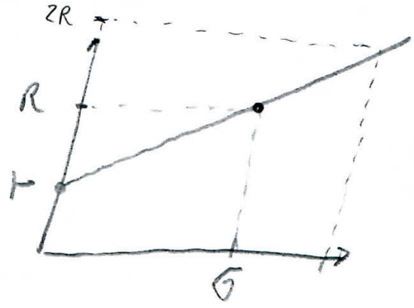
4) *(6 p.ti)* In un mercato composto da titoli rischiosi e da un titolo non rischioso, il rendimento del titolo non rischioso è r. Inoltre sia R il rendimento atteso di un portafoglio efficiente con deviazione standard σ.

1. (3pt.) Determinare la composizione del portafoglio efficiente di rendimento atteso pari al doppio del rendimento del titolo non rischioso.

2. (3pt.) Potrebbe esistere in tale mercato un portafoglio con rendimento atteso pari al doppio del rendimento del titolo non rischioso e deviazione standard pari al doppio di σ?

(Dati : $r = 6\%, R = 10\%, \sigma = 20\%$)

In questa situazione vale il teorema di un fondo:



$$\alpha r + (1-\alpha) R = 2r \Rightarrow \alpha = \frac{2r - R}{r - R}$$ ← quota investita nel titolo non rischioso

$$1-\alpha = 1 - \frac{2r-R}{r-R} = \frac{-r}{r-R}$$ ← quota inv. nel portafoglio efficiente.

5a) Rispondere alla seguente domanda *2 p.ti risposta esatta. -1 p.to risposta errata*
Se si prevede uno scenario futuro di abbassamento dei tassi di interesse, quale delle seguenti azioni risulta preferibile?

1. vendere BOT a 1 anno e acquistare CCT a 10 anni
2. vendere BOT a 1 anno e acquistare BTP a 10 anni   per aumentare la duration
3. vendere CCT a 10 anni e acquistare BOT a 1 anno

5b) *(6 p.ti)* La regola del $7-10$ dice che perchè un capitale raddoppi al tasso del 7% annuo occorre attendere circa 10 anni, mentre al tasso del 10% annuo occorre attendere circa 7 anni. Dimostrarlo.

Risolvendo rispetto a t

$$(1+r)^t = 2$$

si ottiene

$$t = \frac{\log(2)}{\log(1+r)}$$

ora usiamo le approssimazioni

$$\log(2) \approx 7/10 \quad , \quad \log(1+r) \approx r$$

quindi:

$$t \approx \frac{7}{10} \cdot \frac{1}{r}$$

quindi, per $r = 7/100$ si ha $t \approx 10$

per $r = 10/100$ si ha $t \approx 7$