MATEMATICA PER LE APPLICAZIONI ECONOMICHE

Esame 12 Giugno 2012

Cognome e Nome .... Matricola ....

Firma ....SOLUZIONI.. Anno di Corso: ....

1	2	3	4	5	6	7	8	TOT

1. *(2+2=4 p.ti)* In un piano di ammortamento a rata costante, il debito iniziale è D, il numero delle rate è N e l'importo della prima quota interesse è I_1.

   Dati: $D = 5000, N = 12, I_1 = 100$

   Determinare l'importo della rata R

   Selezionare la risposta esatta: *(2 p.ti)*

   (a) $R \leq 510$
   (b) $510 < R \leq 590$
   (c) $590 < R \leq 670$
   (d) $670 < R \leq 750$
   (e) $750 < R$

   $D = 5000 \rightarrow R = 472.8$
   $D = 6000 \rightarrow R = 555.8$
   $D = 7000 \rightarrow R = 638.9$
   $D = 8000 \rightarrow R = 722.1$

   Svolgimento: *(2 p.ti)*:

Determino il tasso di interesse $i = \frac{I_1}{D}$

Calcolo $a_{\overline{N}|i} = \frac{1-d^N}{i}$ dove $d = (1+i)^{-1}$

$R = D / a_{\overline{n}|i}$

2. *(2+2=4 p.ti)* Le due successioni di flussi di cassa $(P, 0, Q)|(0, 1, 2)$ e $(-10, x, x)|(0, 1, 2)$ (dove il tempo è espresso in anni) hanno lo stesso TIR. Calcolare il valore x.

   Dato: $P = -10, Q = 40$

   Calcolare x

   Selezionare la risposta esatta: *(2 p.ti)*

   (a) $x < 0$
   (b) $0 \leq x < 10$
   (c) $10 \leq x < 15$
   (d) $15 \leq x < 20$
   (e) $20 \leq x$

   $P = -10,\ Q = 40 \rightarrow x = 13.3$
   $P = -10,\ Q = 90 \rightarrow x = 22.5$
   $P = -20,\ Q = 80 \rightarrow x = 13.3$
   $P = -5,\ Q = 45 \rightarrow x = 22.5$

   Svolgimento: *(2 p.ti)*:

Se il TIR è i, il fattore di sconto corrispondente è $c = (1+i)^{-1}$ e soddisfa: $P + Qc^2 = 0$ quindi: $c = \left[\frac{-P}{Q}\right]^{1/2}$

Sostituendo nel secondo flusso:

$-10 + xc + xc^2 = 0 \Rightarrow x = \frac{10}{c + c^2}$

3. *(2+2=4 p.ti)* Data la struttura dei fattori di sconto a pronti

$$d(0,1) = 0.98, d(0,2) = 0.97, d(0,3) = 0.96, d(0.4) = 0.955$$

Calcolare il prezzo a termine F, con pagamento tra T_1 anni di uno zero coupon bond che rimborserà un capitale C tra T_2 anni.

Dati: $C = 100, T_1 = 2, T_2 = 4$

$C = 100 \to F = 98.45$
$C = 110 \to F = 108.3$
$C = 105 \to F = 103.4$
$C = 95 \to F = 9\cancel{7}3.5$

Calcolare F

Selezionare la risposta esatta: *(2 p.ti)*

(a) $F < 95$
(b) $95 \le F < 100$
(c) $100 \le F < 105$
(d) $105 \le F < 110$
(e) $110 \le F$

Svolgimento: *(2 p.ti)*:

$$F = C \cdot \frac{d(0,T_2)}{d(0,T_1)}$$

4. *(2+2=4 p.ti)* Con gli stessi dati dell'esercizio precedente. Si vuole rimborsare un debito D in 4 anni, in modo equo rispetto alla struttura dei tassi del mercato assegnata nell'esercizio precedente, con tre rate di uguale importo R pagate in $t = 1, 2, 3$ e un importo pari alla metà di D da pagarsi in $t = 4$. Determinare l'importo R.

Dati: $D = 1000$

$D = 1000 \to R = 179.55$
$D = 1100 \to R = 197.51$
$D = 900 \to R = 161.6$
$D = 950 \to R = 170.58$

Determinare l'importo R

Selezionare la risposta esatta: *(2 p.ti)*

(a) $R < 155$
(b) $155 \le R < 165$
(c) $165 \le R < 175$
(d) $175 \le R < 185$
(e) $185 \le R$

Svolgimento: *(2 p.ti)*:

il flusso $(-D, R, R, R, \frac{D}{2})$ deve essere equo, quindi:

$$-D + Rd_1 + Rd_2 + Rd_3 + \frac{D}{2} d_4 = 0$$

$$\Rightarrow R = \frac{D - \frac{D}{2} d_4}{d_1 + d_2 + d_3}$$

5. *(2+2=4 p.ti)* In un mercato con 3 titoli i cui rendimenti attesi sono $Er_1 = 20\%, Er_2 = 10\%, Er_3 = 40\%$ i portafogli

$$w_1 = (1/2, 0, 1/2), \quad w_2 = (1/2, 1/2, 0)$$

sono efficienti. Determinare il portafoglio efficiente che ha rendimento atteso $\bar{r}$, riportando la quota q investita nel primo titolo

Dati: $\bar{r} = 25\%$

Calcolare la quota q investita nel primo titolo

Selezionare la risposta esatta: *(2 p.ti)*

(a) $0 < q < 0.25$
(b) $0.25 \leq q < 0.5$
(c) $0.5 \leq q < 0.75$
(d) $0.75 \leq q < 1$
(e) nessuno dei precedenti

In qualsiesi caso:

$q = 1/2$

Svoglimento: *(2 p.ti)*:

Il rendimento atteso dei due portafogli è

$\bar{r}_A = \frac{1}{2} Er_1 + \frac{1}{2} Er_3$ $\qquad$ $\bar{r}_B = \frac{1}{2} Er_1 + \frac{1}{2} Er_2$

Il ptf. efficiente con rendimento atteso $\bar{r}$ si ottiene investendo α nel primo ptf. e $(1-\alpha)$ nel secondo ptf. Notare che tale ptf risulta efficiente per il T. dei 2 fondi.

La quota α è pari a:

$$\alpha \bar{r}_A + (1-\alpha)\bar{r}_B = \bar{r} \implies \alpha = \frac{\bar{r} - \bar{r}_B}{\bar{r}_A - \bar{r}_B}$$

Il ptf. richiesto è:

$\alpha W_1 + (1-\alpha) W_2$. La quota nel titolo 1 è $\frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}(1-\alpha) = 1/2$

6. *(4 p.ti)* Con gli stessi dati dell'esercizio precedente, dire se il portafoglio $w_3 = (1/3, 1/3, 1/3)$ è efficiente.

Per il t. dei 2 fondi è efficiente solo se si può ottenere con combinazione lineare di w_1 e w_2, cioè se esiste α tale che

$$\alpha W_1 + (1-\alpha) W_2 = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$$

cioè:

$$\begin{cases} \alpha \frac{1}{2} + (1-\alpha)\frac{1}{2} = 1/3 \\ (1-\alpha)\, 1/2 = 1/3 \\ \alpha\, 1/2 = 1/3 \end{cases}$$

il sistema non ha soluzione, quindi il ptf. non è efficiente

7. *2 p.ti risposta esatta, -1 p.to risposta errata.* Un BTP ha una duration uguale a 5 anni e scade tra T anni. Quindi:

Sì → ~~(a)~~ $T > 5$

(b) $T = 5$

No → ~~(c)~~ $T < 5$ ← La Duration di un BTP è sempre minore della sua maturity

(d) T può essere sia maggiore che minore di 5, dipende dallo yield to maturity,

8. *(6 p.ti)* Enunciare e dimostrare, mostrando come costruire un arbitraggio, la relazione fondamentale tra tassi spot e tassi forward, indicando con $s(t_1)$ il tasso spot con scadenza tra t_1 anni, con $s(t_2)$ il tasso spot con scadenza tra t_2 anni e con $f(t_1, t_2)$ il tasso forward tra t_1 e t_2, con $t_1 < t_2$.

$$\left(1+s(t_1)\right)^{t_1}\left(1+f(t_1,t_2)\right)^{t_2-t_1} = \left(1+s(t_2)\right)^{t_2}$$

Per dimostrare la relazione, consideriamo la seguente strategia:

	0	t_1	t_2
(A) all'istante 0 prestiamo 1 € al tasso $s(t_2)$ fino a t_2	-1	0	$(1+s(t_2))^{t_2}$
(B) all'istante 0 prendiamo in prestito 1 € al tasso $s(t_1)$ per restituirlo in t_1	$+1$	$-(1+s(t_1))^{t_1}$	0
(C) all'istante 0 prendiamo a prestito a termine $(1+s(t_1))^{t_1}$ euro con consegna in t_1 e restituzione in t_2	0	$+(1+s(t_1))^{t_1}$	$(1+s(t_1))^{t_1}(1+f)^{t_2-t_1}$
	0	0	$\underbrace{(1+s(t_2))^{t_2}-(1+s(t_1))^{t_1}(1+f)^{t_2-t_1}}$

la quantità disponibile in t_2 deve essere nulla, altrimenti si potrebbe realizzare un arbitraggio