MATEMATICA PER LE APPLICAZIONI ECONOMICHE

Esame 10 Luglio 2012

Cognome e Nome .... Matricola ....

Firma ....

SOLUZIONI

1	2	3	4	5	6	7	8	TOT

1. *(2+2=4 p.ti)* Un debito iniziale D, viene ripagato ad un tasso annuo dell' 8% con rate annuali costanti non superiori a 1000 Euro

   Dati: $D = 1500$

   Determinare l'importo R della singola rata

   $1500 \to 841.15 \quad (n^*=2)$
   $1600 \to 897.23 \quad (n^*=2)$
   $1700 \to 953.31 \quad (n^*=2)$
   $1800 \to 698.46 \quad (n^*=3)$

   Selezionare la risposta esatta: *(2 p.ti)*

   (a) $0 \leq R < 800$
   (b) $800 \leq R < 900$
   (c) $900 \leq R < 1000$
   (d) $1000 \leq R < 800$
   (e) Nessuno dei precedenti.

   Svoglimento: *(2 p.ti)*:

Il numero minimo di Rate necessarie si trova risolvendo rispetto a n la disuguaglianza:

$$\frac{D}{\frac{1-d^n}{i}} \leq \underset{1000}{K} \implies n \geq \frac{\log\left(1-\frac{Di}{K}\right)}{\log(d)}$$

n^* viene scelto come il minore intero che soddisfa la disuguaglianza.

la Rata R è data da $R = \frac{D}{(1-d^{n^*})/i}$

2. *(2+2=4 p.ti)* Una rendita perpetua anticipata con pagamenti BIENNALI di importo A viene acquistata ad un prezzo P.

   Dati: $A = 40, P = 300$

   $A=40 \to i = 7.12\%$
   $A=20 \to i = 3.51\%$
   $A=50 \to i = 9.54\%$
   $A=30 \to i = 5.41\%$

   Calcolare il TIR annuo i dell'operazione finanziaria

   Selezionare la risposta esatta: *(2 p.ti)*

   (a) $0 \leq i < 4.10\%$
   (b) $4.10\% \leq i < 6.10\%$
   (c) $6.10\% \leq i < 8.10\%$
   (d) $8.10\% \leq i < 10.10\%$
   (e) $10.10\% \leq i$

   Svoglimento: *(2 p.ti)*:

Il TIR biennale i_b si trova risolvendo: $A + \frac{A}{i_b} = P$

cioè $i_b = \frac{A}{P-A}$.

Il TIR annuo è

$$i = (1+i_b)^{1/2} - 1$$

3. *(2+2=4 p.ti)* Un mercato è composto da tre titoli rischiosi aventi rendimenti indipendenti. I rendimenti medi sono rispettivamente $\bar{r}_1, \bar{r}_2, \bar{r}_3$ e le volatilità $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$.

Dati: $\sigma_1 = 0.1, \sigma_2 = \sigma_3 = 0.2, \bar{r}_1 = \bar{r}_2 = 0.2, \bar{r}_3 = 0.4$

Selezionare la risposta esatta: *(2 p.ti)*

Tutte le versioni → solo il terzo titolo è efficiente

(a) Il primo titolo è l'unico efficiente

(b) Il secondo titolo è l'unico efficiente

(c) Il terzo titolo è l'unico efficiente

(d) Più di uno dei tre titoli è efficiente

(e) Nessuno dei tre titoli è efficiente

Svolgimento: *(2 p.ti)*:

Per determinare se un titolo è efficiente si applicano le condizioni del primo ordine alla Lagrangiana:

$$\Sigma \vec{w} + \lambda \vec{1} + \mu \vec{r} = \vec{0} \quad (1) \quad \text{dove } \Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3^2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{r} = \begin{pmatrix} \bar{r}_1 \\ \bar{r}_2 \\ \bar{r}_3 \end{pmatrix} \quad \vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

un portaf. $\vec{w}$ è efficiente se la (1) è risolvibile rispetto a λ e μ.

4. *(2+2=4 p.ti)* Si consideri un mercato composto da titoli rischiosi e da uno non rischioso che rende R_f. C'è inoltre un portafoglio efficiente di soli titoli rischiosi che rende $x\%$.

Dati: $R_f = 3\%, x = 4\%$

Determinare la quota α di titolo non rischioso del portafoglio efficiente avente un rendimento atteso del 9%

Selezionare la risposta esatta: *(2 p.ti)*

(a) $-10 \leq \alpha < -6$

(b) $-6 \leq \alpha < -3$

(c) $-3 \leq \alpha < -1$

(d) $-1 \leq \alpha < 1$

(e) $1 \leq \alpha < 4$

(f) Nessuno dei precedenti.

$x = 4\% \rightarrow \alpha = -5$

$x = 5\% \rightarrow \alpha = -2$

$x = 7\% \rightarrow \alpha = -0.5$

$x = 8\% \rightarrow \alpha = -0.2$

Svolgimento: *(2 p.ti)*:

Per determinare α risolviamo l'equazione

$$\alpha R_f + (1-\alpha)x = 9\% \Rightarrow \alpha = \frac{9\% - x}{R_f - x}$$

5. *(2+2=4 p.ti)* Sia P il prezzo di uno ZCB (obbligazione zero coupon) che scade tra 8 anni e Q il prezzo di un'obbligazione con TAN=2% avente la stessa scadenza. Determinare il prezzo V di un obbligazione con TAN=6% scadente anch'essa tra 8 anni.
Dati: $[P = 97, Q = 99]$

$P = 97,\ Q = 100 \to V = 106$
$Q = 98 \to V = 100$
$Q = 102 \to V = 112$
$Q = 99 \to V = 103$

Selezionare la risposta esatta: *(2 p.ti)*

(a) $90 \leq V < 98$
(b) $98 \leq V < 105$
(c) $105 \leq V < 110$
(d) $110 \leq V < 115$
(e) Nessuno dei precedenti.

Svolgimento: *(2 p.ti)*

L'obbligazione con TAN 6% si può ottenere acquistando x quote dello ZCB e y quote dell'obbl. con TAN 2%, dove x e y risolvono:

$$\begin{cases} x \cdot 0 + y \cdot 2 = 6 \\ x + y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 3 \\ x = -2 \end{cases}$$

quindi, per evitare arbitraggi, il prezzo V è uguale a

$$V = x \cdot P + y \cdot Q$$

6. *(2+2=4 p.ti)* Calcolare la duration D di un'obbligazione che scade tra 2 anni con flusso di pagamenti $(3, 103)$, sapendo che il prezzo dello ZCB con scadenza tra 1 anno è P_1 e il prezzo dello ZCB con scadenza tra 2 anni è P_2
Dati: $P_1 = 98, P_2 = 97$

Selezionare la risposta esatta: *(2 p.ti)*

Tutte le versioni $\to D = 1.97$

(a) $0 < D < 1.50$
(b) $1.50 \leq D < 1.90$
(c) $1.90 \leq D < 1.95$
(d) $1.95 \leq D < 2.00$
(e) Nessuno dei precedenti.

Svolgimento: *(2 p.ti)*

La duration è pari a

$$D = \frac{3 \cdot d_1 + 2 \cdot 103 \cdot d_2}{3 \cdot d_1 + 103 \cdot d_2}$$

dove d_1 e d_2 si ottengono che

$$P_1 = d_1 \cdot 100 \Rightarrow d_1 = P_1/100 \quad , \quad P_2 = d_2 \cdot 100 \Rightarrow d_2 = \frac{100}{P_2}$$

7. *2 p.ti risposta esatta, -1 p.to risposta errata.* Sia X una generica successione di flussi di cassa (positivi e negativi). Indipendentemente dal livello dei tassi, quale tra le seguenti affermazioni sul Valore Attuale Netto (VAN) del flusso X è vera?

   (a) VAN(X) è sempre positivo

   (b) VAN(X) non è mai zero

   (c) Può accadere che VAN(X) risulti negativo o nullo

   (d) VAN(X) può non avere valore determinato

   (e) Sono errate tutte le affermazioni precedenti

8. *(6 p.ti)* La relazione fondamentale tra fattori di sconto a pronti e a termine è

$$d(t, s) = d(t, T)d(t, T, s), \quad t < T < s.$$

Utilizzare tale relazione per dimostrare che

$$d(0, t_1, t_3) = d(0, t_1, t_2)d(0, t_2, t_3), \quad 0 < t_1 < t_2 < t_3$$

il I membro dell'uguaglianza è :

$$d(0, t_1, t_3) = \frac{d(0, t_3)}{d(0, t_1)}$$

il II membro è :

$$d(0, t_1 t_2)\, d(0, t_2, t_3) = \frac{\cancel{d(0, t_2)}}{d(0, t_1)} \cdot \frac{d(0, t_3)}{\cancel{d(0, t_2)}}$$

quindi i due termini sono uguali.